Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Mathematik für Physiker III

Wintersemester 2010/11
C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 11

Aufgabe 62: Berechne das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} + \frac{w^2}{25} \leq 1$$

durch Transformation auf eine Kugel.

Aufgabe 63: Berechne $\int_B (x^2+y^2)dV$, wobei B der Kegel ist, der durch $z = 2$ und $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 64: Berechne das Volumen des Bereichs, der über dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und unter der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = z$ liegt mittels Kugelkoordinaten relativ zum Ursprung, wobei r von θ abhängt.

Aufgabe 65: Ein Teilchen startet zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(R, 0, 0)$ und durchläuft die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (R \cos t, R \sin t, t), (R > 0)$$

mit konstanter Geschwindigkeit Eins. An welchen Punkt ist es nach der Zeit t angelangt?

Aufgabe 66: Sei $F(x, y) = (xy^2, x^2y)$. Berechne $\int_C F \cdot dx$, wobei C die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$

a) geradlinig
b) über den Zwischenpunkt $(0, 1)$
c) über den (kubischen) Parabelbogen $y = x^3$ verbindet.

Aufgabe 67: Berechne die Länge der durch $\gamma(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, gegebenen Zykloide.

Aufgabe 68: Sei $F(x, y) = (x + y, y - x)$. Berechne $\int_C F \cdot dx$ längs der Kurve C_1 mit der Parameterisierung $\gamma_1(t) = (2t^2 + t + 1, t^2 + 1), t \in [0, 1]$, und längs der Kurve C_2, die gegeben ist durch die Strecke von $(1, 1)$ nach $(1, 2)$ und anschliessend die Strecke von $(1, 2)$ nach $(4, 2)$.

Aufgabe 69: Berechne

$$\int_C F \cdot dx, \qquad F(x, y) = \begin{pmatrix} 3 + 2xy \\ x^2 - 3y^2 \end{pmatrix},$$

wobei C durch $r(t) = \binom{e^t \sin(t)}{e^t \cos(t)}$, $0 \leq t \leq \pi$ gegeben ist.
Hinweis: Finde f, so dass $\nabla f = F$.

Aufgabe 70: Berechne folgendes Integral einmal direkt und einmal mittels Green's Theorem:

$$\int_C xy^2 dx + x^3 dy = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

wobei C das Rechteck mit den Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$, $(0, 3)$ ist.

Besprechung: Donnerstag 20.01.2011, bzw. Mittwoch, 26.01.2011.