Universität Tübingen | **Mathematik für Physiker III** | Wintersemester 2010/11
Mathematisches Institut | | C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich

---

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 13

Aufgabe 71: Berechne das Oberfächenintegral $\int_S \sqrt{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{625}}\, d\boldsymbol{S}$, wobei S die Ellipsoidfläche $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ ist.

Aufgabe 72: Berechne die Oberfläche des Kegels, der durch $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0$ gegeben ist.

Aufgabe 73: Berechne den Flächeninhalt der Fläche, welche durch $\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ parametrisiert wird, wobei $u^2 + v^2 \leq 1$.

Aufgabe 74: Sei C die Kurve, die durch den Schnitt der Ebene $y + z = 2$ mit dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ resultiert und bezüglich der z-Achse im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Berechne $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}$ für $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$.

Aufgabe 75: Berechne $\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}$ für das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x, y, z) := (y, -x, \sinh(xyz))$ und die Fläche $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 76: Berechne $\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}$ für das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x, y, z) := (x + y, y + z, z + x)$ und den Zylinder $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 5, x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Aufgabe 77: Sei $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$ und S der Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ mit Boden $z = 0$ und Decke $z = 2$. Berechne $\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ einmal durch direkte Integration und einmal mit Hilfe vom Divergenztheorem (Gauss).

Aufgabe 78: Es sei S der Rand von der Region $y \geq 0, x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$. Berechne $\int_S y^2 dx + 3xydy$.

Aufgabe 79: Es sei $\boldsymbol{F} = (\mathrm{e}^z, 1, x\mathrm{e}^z)$. Zeige, dass $\boldsymbol{F}$ konservativ ist, und finde φ sodass $\nabla\varphi = \boldsymbol{F}$.

Aufgabe 80:

a) Verwende Green um die *1. Greensche Identität* zu beweisen:

$$\int_S f \Delta g \, d(x, y) = \oint_{\partial S} f(\boldsymbol{\nabla} g) \cdot \boldsymbol{N} dS - \int_S (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot (\boldsymbol{\nabla} g) d(x, y).$$

Dabei sind f und g stetig partiell differenzierbar.

b) Benutze die 1. Teilaufgabe um die *2. Greensche Identität* zu beweisen:

$$\int_S (f \Delta g - g \Delta f) d(x, y) = \oint_{\partial S} (f(\boldsymbol{\nabla} g) - g(\boldsymbol{\nabla} f)) \cdot \boldsymbol{N} dS.$$

Wieder sind f und g stetig partiell differenzierbar.

Besprechung: Donnerstag 27.01.2011, bzw. Mittwoch, 2.02.2011.