C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2010/11
22. Oktober 2010

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 2

Aufgabe 5:

Sind $f,\, g : X \to \mathbb{R}$ stetig, so sind auch die Funktionen $f+g,\ f\cdot g : X \to \mathbb{R}$ und, falls $g(x) \neq 0$ $\forall x \in X$, $f/g : X \to \mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 6:

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Aufgabe 7:

Setze $f(x) = e^{-x^2}$ und $f_n(x) = f(x-n)$.

a) Zeige dass f_n auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert.

b) Zeige dass f_n gleichmässig auf $[-M, M]$ für $M > 0$ konvergiert.

Aufgabe 8: Weissingerscher Fixpunktsatz

Sei $X \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums und $A : X \to X$ eine Selbstabbildung. Für eine beliebiges $u_0 \in X$ definieren wir die Iterationsfolge (u_n) durch $u_{n+1} = A(u_n)$. Sei weiter $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ eine konvergente Reihe mit $\alpha_n > 0$ und für zwei beliebige Startwerte u_0, v_0 gelte stets $\|u_n - v_n\| \leq \alpha_n \|u_0 - v_0\|$. Zeigen Sie, dass A dann genau einen Fixpunkt $x \in X$ besitzt und dass dieser Grenzwert jeder beliebigen Iterationsfolge (x_n) mit $x_0 \in X$ ist.

Aufgabe 9:

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $f, f_n : X \to Y$. Nehme an, $f_n \to f$ gleichmässig.

a) Zeige, dass f_n eine Cauchy-Folge ist bezüglich der Norm $\|g\|_\infty := \sup_{x\in X} \|g(x)\|_Y$.

b) Falls zusätzlich X kompakt ist, zeige, dass ein $M > 0$ existiert, so dass $\|f_n\|_\infty \leq M$ $\forall n$.

Besprechung: Mittwoch, 27.10.2010, bzw. Donnerstag 28.10.2010.