C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2010/11
28. Oktober 2010

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 3

Aufgabe 10:

a) Es seien X und Y metrische Räume, $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn das Urbild $f^{-1}(O) \subset X$ jeder offenen Menge $O \subset Y$ wieder offen ist.

b) Wir sagen eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, falls für jede offene Menge $O \subset X$ auch $f(O) \subset Y$ offen ist. Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass aus f stetig nicht folgt, dass f offen ist.

Aufgabe 11:

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Konstruieren Sie eine Folge, sodass jeder Punkt in X Häufungspunkt dieser Folge ist.
Bemerkung: Ein Raum X heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge T gibt, die dicht liegt. Dabei liegt T dicht in X, wenn für alle $\epsilon > 0$ und für alle $x \in X$ ein $a \in T$ existiert mit $d(a, x) < \epsilon$. Somit haben Sie gezeigt, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist.

Aufgabe 12:

Zeigen Sie:

a) Die Gebiete in $\mathbb{R}$ sind genau die offenen Intervalle (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

b) Sei K Teilmenge eines metrischen Raums X und habe jede Folge in K auch einen Häufungspunkt in K, dann ist K kompakt.

Aufgabe 13:

Es sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, dass $f : K \to \mathbb{R}$ genau dann gleichmässig stetig ist, wenn f stetig ist.

Aufgabe 14:

a) Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $f : X \to \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ sei eine Familie von Funktionen auf K, wobei K kompakt. Zeigen Sie, dass $\{f_n\}$ gleichgradig stetig ist, falls $\{f_n\}$ die Lipschitzbedingung
$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L\|x - y\| \,\forall\, n \,\forall x, y \in X$$
erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 15:

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass g in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, wobei die partiellen Ableitungen nach x und y nicht vertauschen.

b) Untersuchen Sie $\partial_x \partial_y g$ auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

c) Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f überall partiell differenzierbar nach x und y ist, obwohl f nicht stetig ist.

Besprechung: Mittwoch, 3.11.2010, bzw. Donnerstag 4.11.2010.