C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2010/11
9. Dezember 2010

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 8

Aufgabe 39:

a) Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $v(x) = x$. Bestimme den zugehörigen Fluß ϕ^t.

b) Gegeben sei der Fluß $\phi^t(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $\phi^t(x) = D(t)x$ mit

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Bestimme und skizziere das zugehörige Vektorfeld.

Aufgabe 40:

Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $v(x) = \exp(x)$. Bestimme das zugehörige dynamische System $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ für maximal mögliches $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 41:

a) Sei $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass v lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Sei nun $v : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zeige, dass $v|_K : K \to \mathbb{R}^n$ auf jedem Kompaktum $K \subset G$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 42:

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-stetiges Vektorfeld, d.h. es existieren Konstanten $L, M < \infty$, so dass $\|v(x)\| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und v genügt einer globalen Lipschitzbedingung mit der Konstanten L.
Zeige, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung der folgenden DGL

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t)) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

existiert, d.h. es gibt eine eindeutige, stetig differenzierbare Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die (1) löst.

Aufgabe 43:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Finde die allgemeine Lösung.

b) Löse $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 44:

Löse

$$\ddot{x} + 4x = \cos 2t$$

mit den Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ mittels einer Transformation auf ein System 1. Ordnung und verwende die Lösungsformel aus Satz 9.8.

Besprechung: Mittwoch, 08.12.2010, bzw. Donnerstag 09.12.2010.