C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2010/11
9. Dezember 2010

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 9

Aufgabe 45: Ein Instabilitätskriterium

$(0,0)$ sei ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems

$$\dot{x} = F(x,y), \qquad \dot{y} = G(x,y).$$

Zeige, dass er gewiss dann *instabil* ist, wenn es eine Funktion $E(x,y)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) E ist auf einer offenen Umgebung U von $(0,0)$ stetig differenzierbar;

b) die Funktionen E und $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$ verschwinden im Nullpunkt und sind ansonsten *positiv*.

Erinnerung: Ein Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ heisst *stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Gilt für eine Lösung $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$ und für ein gewisses t_0 die Ungleichung $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$ so ist $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon$ für alle $t \geq t_0$.

Aufgabe 46:

Die fastlinearen Systeme

$$\dot{x} = y - x^3, \qquad \dot{y} = -x - y^3 \tag{1}$$
$$\text{und } \dot{x} = y + x^3, \qquad \dot{y} = -x + y^3 \tag{2}$$

sind Störungen ein und desselben linearen Systems

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x. \tag{3}$$

Zeige:

a) Jedes der drei Systeme hat $(0,0)$ als einzigen Gleichgewichtspunkt.

b) Dieser Gleichgewichtspunkt ist stabil aber *nicht* asymptotisch stabil, bezüglich (3), asymptotisch stabil bezüglich (1), instabil bezüglich (2).

Hinweis: Man ziehe das Kriterium aus der Aufgabe 45 heran und benutze dabei eine Funktion $E(x,y)$ der Form $Ax^2 + By^2$.

Erinnerung: Ein Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ heisst *asymptotisch stabil*, wenn er stabil ist und überdies ein $R > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Gilt für eine Lösung $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$ und ein gewisses t_0 die Ungleichung $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_0\| < R$, so strebt $\boldsymbol{x}(t)$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 47:

Sei $f(x,y)$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und $f(0,0) = 0$. Zeige:

a) $(0,0)$ ist der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems

$$\dot{x} = y - xf(x,y), \qquad \dot{y} = -x - yf(x,y). \tag{4}$$

b) Das zugehörige lineare System ist

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x;$$

sein Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil, gemäss Aufgabe 46.

c) K sei ein geeigneter Kreis um den Nullpunkt und $\dot{K} := K \setminus \{(0,0)\}$. Der Gleichgewichtspunkt des Systems (4) ist

$$\begin{cases} \text{stabil, wenn} & f(x,y) \geq 0 \text{ in } K \text{ ist,} \\ \text{asymptotisch stabil, wenn} & f(x,y) > 0 \text{ in } \dot{K} \text{ ist,} \\ \text{instabil, wenn} & f(x,y) < 0 \text{ in } \dot{K} \text{ ist.} \end{cases}$$

Aufgabe 48:

Bestimme sämtliche Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x} = 1 - xy, \qquad \dot{y} = x - y^3$$

und ihren Stabilitätscharakter.

Aufgabe 49: Das gedämpfte mathematische Pendel

Seine Differentialgleichung ist

$$\ddot{\varphi} + \frac{r}{ml}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$$

(m die Masse und l die Länge des Pendels, $r > 0$ der Dämpfungskoeffizient, g die Erdbeschleunigung). Das zugehörige System

$$\dot{\varphi} = \psi, \qquad \dot{\psi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi) - \frac{r}{ml}\psi.$$

Zeige:

a) Dieses System hat die Gleichgewichtspunkte $(\varphi_k, \psi_k) := (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $(0,0)$ ist asymptotisch stabil, $(\pi, 0)$ instabil.

Besprechung: Mittwoch, 22.12.2010, bzw. Donnerstag 16.12.2010.