Mathematatik III für Physiker*

Prof. Christian Hainzl

Universität Tübingen
WS 2010/11

geTEXt von Raphael Wieland und Simon Mayer

*Dieses Skript führt das Skript von Stefan Teufel (Mathematik III für Physiker WS 08/09) fort (ab Kapitel 9.15)

11 Qualitative Theorie autonomer Systeme

Es seien F, G stetig partiell differenzierbar.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= G(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

(x_0, y_0) sei stationärer Punkt (Gleichgewichtspunkt), das heißt

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

Es ist dann

$$\frac{F(x,y)}{G(x,y)} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

oder

$$\frac{G(x,y)}{F(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

falls entweder $F(x,y) \neq 0$ oder $G(x,y) \neq 0$ in Umgebungen von (x_0, y_0).

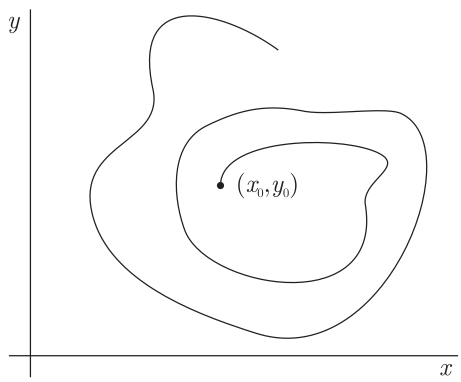


Abbildung 1: Trajektorie eines Teilchens

11.1 Definition. <u>stabiler stationärer Punkt</u>

Ein stationärer Punkt (x_0, y_0) heißt STABIL, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein δ gibt mit folgender Eigenschaft: Gilt für eine Lösung $(x(t), y(t))$ von (1) und für ein $\bar{t}$, dass $(x(\bar{t}), y(\bar{t}) \in B_\delta(x_0, y_0)$ so ist $(x(t), y(t)) \in B_\epsilon(x_0, y_0)$ $\forall t > \bar{t}$.
(x_0, y_0) ist ASYMPTOTISCH STABIL, wenn er stabil ist und es ein $R > 0$ gibt mit der Eigenschaft: Gilt für ein t, dass $(x(t), y(t)) \in B_R(x_0, y_0)$ so gilt

$$(x(t), y(t)) \to (x_0, y_0) \text{ für } t \to \infty$$

Siehe zur Veranschaulichung Abbildung 2.

11.2 Beispiel. <u>harmonischer Oszillator</u>

Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators ist

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Transformiere diese auf ein System 1. Ordnung.

$$\dot{x} = y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

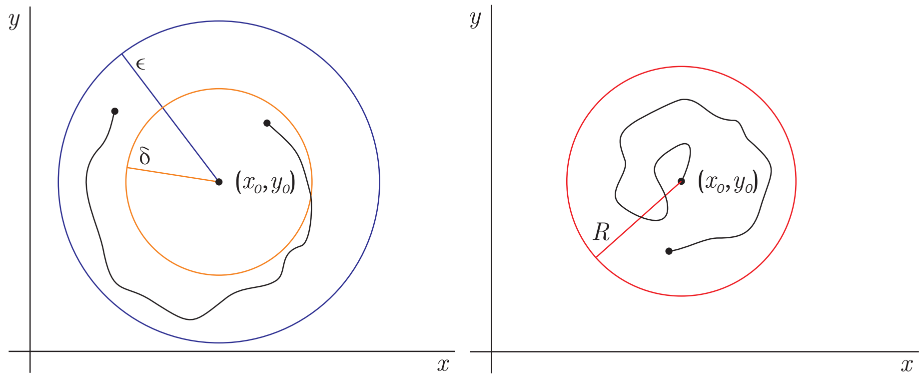


Abbildung 2: stabiler (links) und asymptotisch stabiler (rechts) stationärer Punkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t \\ -x_0 \omega \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Suche Eigenwerte:

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \,\mathrm{Id} \right) = 0$$
$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\omega$$

Suche Eigenvektoren (Eigenvektor ist immer ein Vielfaches von (1, a) oder (0, 1)):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow a = i\omega$$
$$\lambda_1 = i\omega, c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$$

Ist der erste Eigenwert komplex, ist der zweite sein konjugiert Komplexes:

$$\lambda_2 = -i\omega, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

Die Lösung des linearen Systems ist:

$$e^{\lambda_1 t} c_1 = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$$

Die Lösung setzt sich zusammen aus Real- und Imaginärteil:

$$\varphi_1 = \mathrm{Re} \left(e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix}$$
$$\varphi_2 = \mathrm{Im} \left(e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mu_1 \varphi_1(t) + \mu_2 \varphi_2(t)$$

So findet man

$$x(t) = \mu_1 \cos \omega t + \mu_2 \sin \omega t$$
$$y(t) = \dot{x}(t)$$

Die Lösung lässt sich schöner schreiben, klammert man $\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ aus:

$$x(t) = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}} \cos \omega t + \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}} \sin \omega t \right)$$

Wir nennen die Brüche a und b,

$$x(t) = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \, (a \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

Wegen $a^2 + b^2 = 1$ kann man auch hier trigonometrische Funktionen benutzen:

$$a = \cos \phi$$
$$b = \sin \phi$$

Mit Formeln für das Produkt von Winkelfunktionen ergibt sich:

$$x(t) = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \cos(\omega t - \phi)$$
$$y(t) = -\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \, \omega \sin(\omega t - \phi)$$

Im Phasenraum ergibt das Ellipsen, vgl. Abbildung 3.

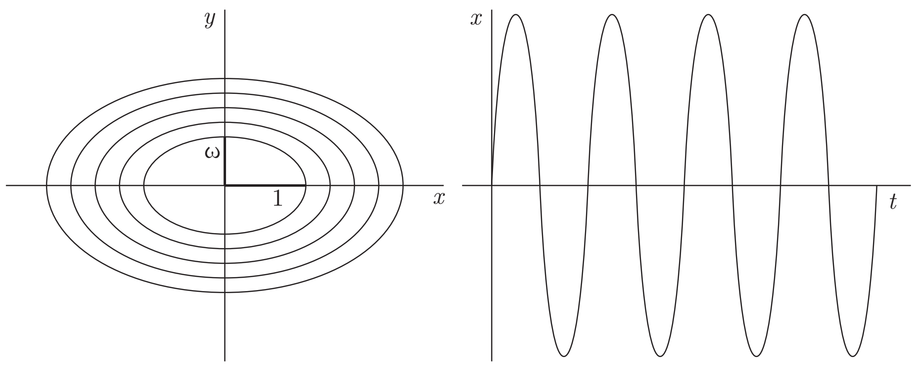


Abbildung 3: Phasenraum und x-t-Diagramm eines ungedämpften harmonischen Oszillators

11.3 Beispiel. gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators (vgl. Abbildung 4) ist

$$\ddot{x} + 2\rho \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Transformiere diese auf ein System 1. Ordnung. Sei dazu $\dot{x} = y$ und $\dot{y} = \ddot{x} = -2\rho y - \omega^2 x$. Das

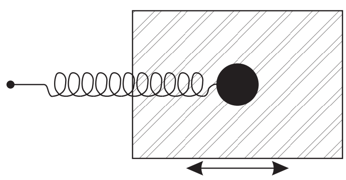


Abbildung 4: Gedämpfter harmonischer Oszillator

System lautet dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\rho \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Berechne nun die Eigenwerte des Problems mithilfe des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2\rho - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda(2\rho + \lambda) + \omega^2 \\ &\overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

Auflösen der Gleichung nach λ ergibt

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

Betrachte nun den Fall, dass $\rho > \omega$, was einer starken Dämpfung entspricht. Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ sind dann reell und negativ. Bestimme die zugehörigen Eigenvektoren $\varphi_{1,2}$:

$$\begin{aligned}A\varphi_1 &= \lambda_1 \varphi_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow a = \lambda_1\end{aligned}$$

Also sind die Eigenvektoren

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \mu_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \\ \mu_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Um das Verhalten im Phasenraum zu bestimmen sei nun o.B.d.A. $\lambda_1 > \lambda_2$. Dann ist $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. Forme die Lösung entsprechend um:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \mu_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right)$$

Verwende nun vom Anfang des Kapitels, dass $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{\mu_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1^2 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \lambda_2^2}{\mu_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \lambda_2} \\ &= \frac{\mu_1 \lambda_1^2 + \mu_2 \lambda_2^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}} \xrightarrow[t \to \infty]{} \lambda_1\end{aligned}$$

Also ist für $t \to \infty \quad \mathrm{d}y = \lambda_1 \mathrm{d}x$ und damit $\sim y = \lambda_1 x$. Die Trajektorien im Phasenraum sind in Abbildung 5 dargestellt. Für den Fall, dass $\rho < \omega$ (schwache Dämpfung) sind die Eigenwerte komplex konjugiert:

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\sqrt{\omega^2 - \rho^2} = -\rho \pm i\omega_1$$

Die Eigenvektoren und allgemeinen Lösungen sind (analog zu oben)

$$\begin{aligned}\text{Eigenvektor: } a_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \\ a_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \text{Lösung: } \varphi_1 &= \left\{ \mathrm{Re}\left(e^{i\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right), \mathrm{Im}\left(e^{i\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right) \right\} \\ \varphi_2 &= \left\{ \mathrm{Re}\left(e^{i\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right), \mathrm{Im}\left(e^{i\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \right\}\end{aligned}$$

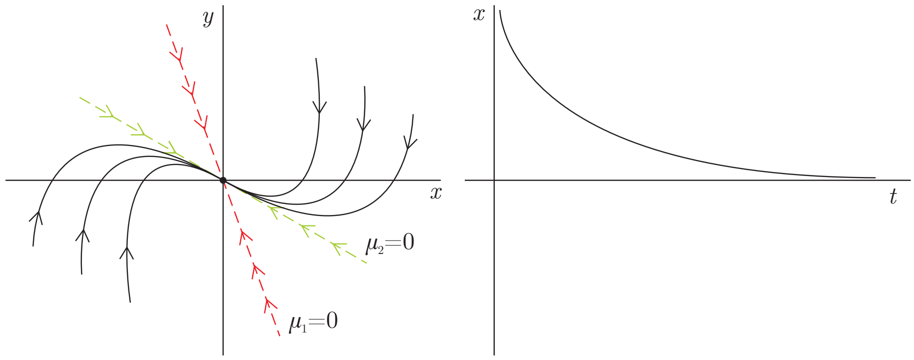


Abbildung 5: Phasenraum und x-t-Diagramm eines stark gedämpften harmonischen Oszillators

Man findet also für die Lösung in $x(t)$ und $y(t)$:

$$x(t) = e^{-\rho t}(\mu_1 \cos \omega_1 t + \mu_2 \sin \omega_1 t)$$
$$y(t) = e^{-\rho t}((\mu_2\omega_1 - \mu_1\rho)\cos\omega_1 t - (\mu_2\rho + \mu_1\omega_1)\sin\omega_1 t)$$

Schreibe $x(t)$ in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\rho t}\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}(\cos\phi\cos\omega_1 t + \sin\phi\sin\omega_1 t) \\ &= e^{-\rho t}\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}\cos(\phi - \omega_1 t) \end{aligned}$$

Macht man dasselbe für $y(t)$, erkennt man, dass $(x(t), y(t))$ im Phasenraum beschränkt ist:

$$|(x(t), y(t))| \leq e^{-\rho t}$$

Für eine Skizze siehe Abbildung 6.

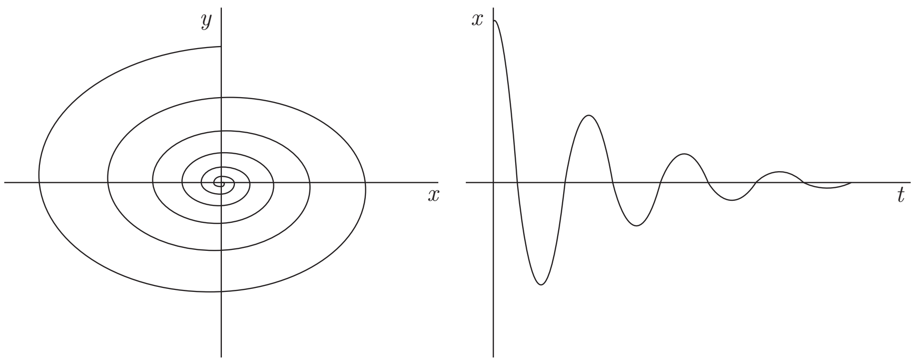


Abbildung 6: Phasenraum und x-t-Diagramm eines schwach gedämpften harmonischen Oszillators

Stabilität linearer Systeme

Betrachte nur Probleme in $\mathbb{R}^2$ mit

$$\dot{x} = Ax \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

wobei A ähnlich einer Diagonalmatrix D ist, das heißt

$$A = TDT^{-1} \quad (T^{-1}AT = D)$$

dabei hat D die Form

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

und $\lambda_{1,2}$ sind Eigenwerte. Diese berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - \Delta} \\ s &= \operatorname{Spur} A = a_{11} + a_{22} \\ \Delta &= \det A = \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Bei Δ wurde der Multiplikationssatz von Determinanten verwendet:

$$\begin{aligned} \det A &= \det(TDT^{-1}) \\ &= \det T \det(T^{-1}) \det D \\ &= \det T (\det T)^{-1} \det D \\ &= \det D \end{aligned}$$

Unterscheide nun zwischen der transformierten Basis der Eigenwerte y und der Basis der Abbildung x, es ist hier

$$y = T^{-1}x \quad x = Ty$$

Die lineare Differentialgleichung lautet dann in der transformierten Basis

$$\begin{aligned} \dot{y} &= T^{-1}\dot{x} \\ &= T^{-1}Ax \\ &= T^{-1}ATy \\ &= Dy \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2}$ sind $\lambda_1 e_1$ und $\lambda_2 e_2$. Die Allgemeine Lösung ist dann

$$y(t) = \mu_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} e_2 = e^{tD} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Wie sieht nun die transformierende Abbildung T aus? Betrachte zur Bestimmung die Bilder der Einheitsvektoren:

$$Te_1 = c_1 \quad Te_2 = c_2$$

Es ist dann

$$Ac_1 = ATe_1 = T \underbrace{T^{-1}AT}_{=D} e_1 = TDe_1 = \lambda_1 Te_1$$

Damit ist

$$T = (c_1, c_2)$$

Also ist die allgemeine Lösung in der Basis von A:

$$x(t) = Ty(t) = \mu_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} c_2$$

Mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ lassen sich die Koeffizienten $\mu_{1,2}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 &= x_0 \\ T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} &= x_0 \\ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} &= T^{-1} x_0 \end{aligned}$$

Es folgt damit für $x(t)$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left(e^{\lambda_1 t}c_1, e^{\lambda_2 t}c_2\right) T^{-1}x_0 \\
&= Te^{tD}T^{-1}x_0
\end{aligned}
$$

da

$$
\left(e^{\lambda_1 t}c_1, e^{\lambda_2 t}c_2\right) = Te^{tD} = (c_1, c_2)\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}
$$

11.4 Bemerkung. <u>**Lösungspropagator**</u>

Die Lösung $x(t)$ kann geschrieben werden als

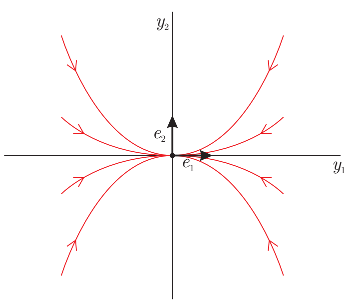
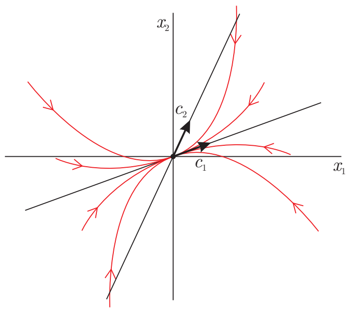
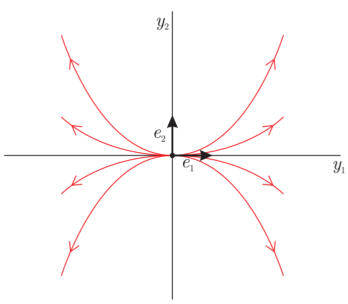
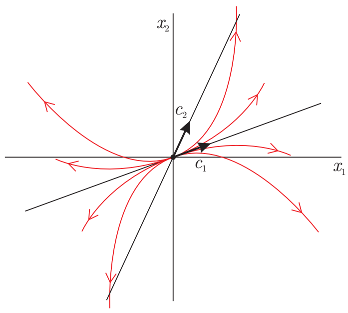
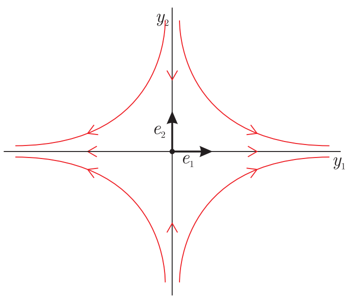
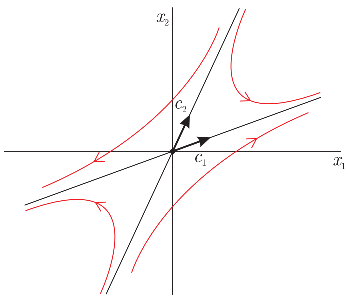
$$
x(t) = Te^{tD}T^{-1}x_0 = \phi(t)x_0
$$

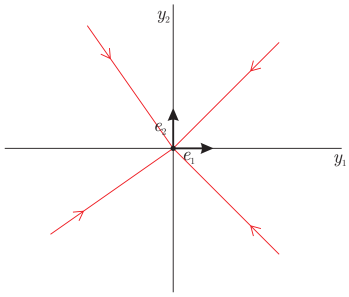
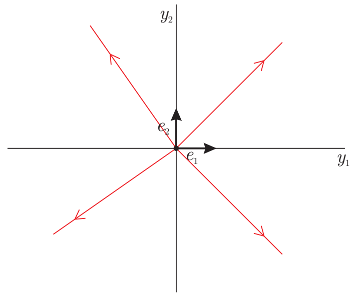
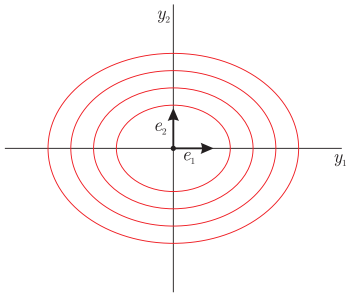
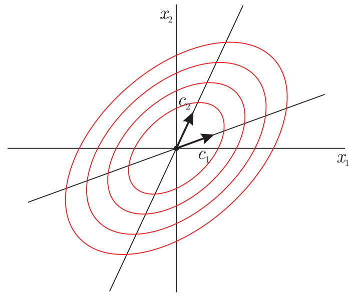
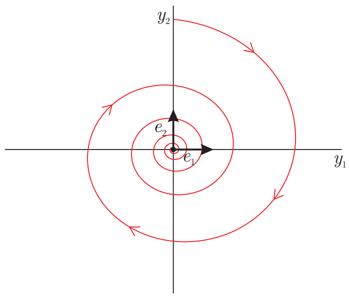
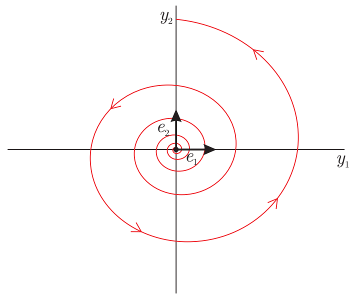
wobei $\phi(t)$ der Lösungspropagator ist. Es gilt: $\phi(0) = \mathrm{Id}$. Es sei bemerkt, dass der Lösungspropagator auch anders gefunden werden kann

$$
M(t) = \left(e^{\lambda_1 t}c_1, e^{\lambda_2 t}c_2\right)
$$

Aus $M(t)$ lässt sich der Lösungspropagator mittels $\phi(t) = M(t)M(0)^{-1}$ gewinnen.

Betrachte die folgende Tabelle für eine Übersicht:

Eigenwerte		**Verhalten um** $(0,0)$	
Vorzeichen	Art		
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	reell		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	reell		
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	reell		

Eigenwerte		Verhalten um $(0,0)$	
Vorzeichen	Art		
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (links) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (rechts)	reell		
$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	rein komplex		
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha < 0$ (links) $\alpha > 0$ (rechts)	konjugiert komplex		

11.5 Satz.

Sei $\dot{x} = Ax$, $\dot{x} = F(x,y) \quad \dot{y} = G(x,y)$. Der Punkt $(0,0)$ ist asymptotisch stabil, wenn jeder Eigenwert von A einen negativen Realteil hat (falls $A \in M(n \times n)$).

11.6 Beispiel. **<u>gedämpfter harmonischer Oszillator</u>**

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + kx = 0$$

$$y = \dot{x}$$

$$\dot{y} = \ddot{x} = -\frac{r}{m}y - \frac{k}{m}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{r}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Energie E des Systems ist gegeben durch

$$E = \frac{m}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2$$

Und deren zeitliche Änderung ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x(t),y(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} \\ &= kxy + my\left(-\frac{r}{m}y - \frac{k}{m}x\right) \\ &= -ry^2 \leq 0\end{aligned}$$

Die Energie nimmt also entlang Lösungen ab (oder bleibt konstant). Daher ist das System stabil. Zusammengefasst muss für die Energie eines stabilen Systems gelten:

$$\begin{aligned}E(0,0) &= 0 \\ E(x,y) &\neq 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E &\leq 0\end{aligned}$$

Die Ljapunoff-Methode

Sei $(0,0)$ ein isolierter stationärer Punkt der Gleichung (1). $E(x,y)$ heißt Ljapunoff-Funktion für (1), wenn E in einer Umgebung U von $(0,0)$ folgende Eigenschaften besitzt:

- E ist stetig diffbar
- E verschwindet in $(0,0)$, $E > 0$ außerhalb.
- $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$ verschwindet in $(0,0)$ und ist ≤ 0 außerhalb.

Für < 0 im letzten Punkt ist die Funktion STRENG Ljapunoff.

11.7 Theorem.

Das System (1) habe $(0,0)$ als stationären Punkt und besitze eine strenge Ljapunoff-Funktion. Dann ist $(0,0)$ STABIL. Ist E streng Ljapunoff, so ist $(0,0)$ ASYMPTOTISCH STABIL.

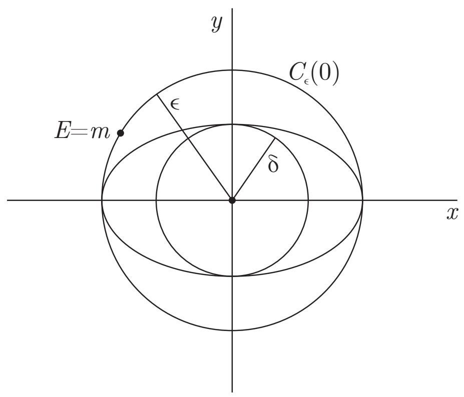


Abbildung 7: Stationärer Punkt

Beweis. (a) Stabilität

Gebe $\epsilon > 0$ vor (vgl. Abbildung 7). $C_\epsilon(0)$ sei die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius ϵ. m sei das Minimum der Ljapunoff-Funktion auf dieser Kreisscheibe.

$$m = \min E(x,y) \quad (x,y) \in C_\epsilon(0)$$

Nun kann man ein δ finden, sodass E in einer Umgebung mit Radius δ kleiner als m bleibt.

$$\max_{B_\delta(0)} E(x,y) < m$$

Die Trajektorie $(x(t), y(t))$ sei Lösung zu (1), $(x(0), y(0)) \in \overline{B_\delta(0)}$ $\quad$ (= Abschluss von $B_\delta(0)$)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x(t), y(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} \\ &= \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \leq 0 \text{ (laut Voraussetzung)}\end{aligned}$$

Da $E(x(0), y(0)) < m$ und $\frac{d}{dt}E \leq 0 \Rightarrow E < m\ \underline{\forall t > 0} \Rightarrow$ System ist stabil.

(b) asymptotische Stabilität

Sei E strenge Ljapunoff-Funktion. Dann ist $E(x(t), y(t))$ streng monoton abnehmend und positiv, es ist also

$$E(x(t), y(t)) \geq \lambda := \lim_{t\to\infty} E(x(t), y(t)) \geq 0$$

so konvergiert $E(x(t), y(t))$ gegen einen Grenzwert. Für $\lambda = 0$ folgt

$$(x(t), y(t)) \to (0, 0),$$

da $E \neq 0$ außerhalb $(0, 0)$. Nun ist zu zeigen, dass λ nur 0 sein kann.
Angenommen, $\lambda > 0$. Dann gibt es eine Umgebung B_ρ von $(0, 0)$ mit Radius $0 < \rho < \epsilon$, sodass $E(x, y) < \lambda \quad \forall (x, y) \in \overline{B_\rho}$. Auf dem Kreisring zwischen B_ρ und einer Kreislinie mit Radius $\epsilon > \rho$ gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \leq M \qquad \forall (x, y) \in \overline{B_\rho \backslash B_\epsilon}$$

mit

$$M = \sup\left\{ \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \;\middle|\; (x, y) \in \overline{B_\epsilon \backslash B_\rho} \right\} < 0 \quad \text{(nach Definition)}$$

So lässt sich E nach oben abschätzen:

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(s)\mathrm{d}s \leq E(0) + tM \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\lambda > 0$. Aus $\lambda = 0$ folgt: $(0, 0)$ ist asymptotisch stabil.

□

Linearisieren

Um die Frage nach der Stabilität eines stationären Punktes zu klären, lohnt es sich auch, (1) um diesen Punkt zu linearisieren. Der stationäre Punkt sei (x_0, y_0)

$$\begin{aligned}F(x_0, y_0) = 0 \\ G(x_0, y_0) = 0\end{aligned}$$

Die Entwicklung ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F(x_0, y_0) \\ G(x_0, y_0) \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \to 0 \text{ und } \frac{|g(x, y)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \to 0 \text{ für } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

und

$$A = D\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0, y_0)}$$

Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Denn: Setzt man $\bar{x} = x - x_0$ und $\bar{y} = y - y_0$ so ergibt sich (zusammen mit $\tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}) = f(x-x_0, y-y_0)$ und $\tilde{g}(\bar{x}, \bar{y}) = g(x-x_0, y-y_0)$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}(\bar{x},\bar{y}) \\ \tilde{g}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix}$$

11.8 Satz.
Sei $(0,0)$ stationärer Punkt von (1), F, G stetig differenzierbar. Sei ferner

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ähnlich einer Diagonalmatrix.

(a) Hat A ausnahmslos Eigenwerte mit negativem Realteil, so ist $(0,0)$ isolierter stationärer Punkt und ASYMPTOTISCH STABIL.

(b) Hat A mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil, so ist $(0,0)$ INSTABIL.

Beweis. Zur Isoliertheit: Angenommen es gibt eine Folge (x_n, y_n) von stationären Punkten. Schreibe diese nun in Polarkoordinaten:

$$x_n = r_n \cos\phi_n \quad y_n = r_n \sin\phi_n$$

Alle diese Punkte sind nun eine Lösung von (1) und zwar $(0,0)$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} r_n\cos\phi_n \\ r_n\sin\phi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(r_n\cos\phi_n) \\ g(r_n\sin\phi_n) \end{pmatrix} \\
&= A\begin{pmatrix} \cos\phi_n \\ \sin\phi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{f(r_n\cos\phi_n)}{r_n} \\ \frac{g(r_n\sin\phi_n)}{r_n} \end{pmatrix} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi_n \\ \sin\phi_n \end{pmatrix}}_{|\cdot|=1} &= \underbrace{-A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{f(r_n\cos\phi_n)}{r_n} \\ \frac{g(r_n\sin\phi_n)}{r_n} \end{pmatrix}}_{|\cdot|\to 0}
\end{aligned}$$

Dies erzeugt einen Widerspruch. Also ist $(0,0)$ isoliert. Zur asymptotischen Stabilität: Sei

$$E = ax^2 + bxy + cy^2$$

und $(x(t), y(t))$ eine Lösung von (1) Es ist dann

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x(t),y(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} \\
&= \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \\
&= \frac{\partial E}{\partial x}(a_{11}x + a_{12}y) + \frac{\partial E}{\partial y}(a_{21}x + a_{22}y) + \frac{\partial E}{\partial x}f + \frac{\partial E}{\partial y}g \\
&= (2ax + by)(a_{11}x + a_{12}y) + (bx + 2cy)(a_{21}x + a_{22}y) + \frac{\partial E}{\partial x}f + \frac{\partial E}{\partial y}g \\
&= -(x^2 + y^2) + \frac{\partial E}{\partial x}f + \frac{\partial E}{\partial y}g
\end{aligned}$$

Bestimme nun die Koeffizienten a, b und c, sei dazu $\Delta = \det A$. Es gilt für die Terme in

$$\begin{aligned} (x^2): &\quad 2aa_{11} + a_{21}b = -1 \\ (y^2): &\quad ba_{12} + 2ca_{22} = -1 \\ (xy): &\quad ba_{11} + 2aa_{12} + 2a_{21}c + ba_{22} = 0 \end{aligned}$$

Mit $B = -(a_{11} + a_{22})\Delta$ ist

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_{12}^2 + a_{21}^2 + \Delta}{2B} \\ b &= \frac{-a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{B} \\ c &= \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \Delta}{2B} \end{aligned}$$

Damit ist $E \geq 0$ außerhalb von $(0,0)$ und $E(0,0) = 0$. Wenn nun noch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E < 0$ so ist E Ljapunoff-Funktion. Stelle also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E$ auf und transformiere in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E &= \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \\ &= -(x^2 + y^2) + (2ax + by)f(x,y) + (bx + 2cy)g(x,y) \\ &= -r^2 + r^2 \left[(2a\cos\phi + b\sin\phi)\frac{f(r\cos\phi, r\sin\phi)}{r} + (b\cos\phi + 2c\sin\phi)\frac{g(r\cos\phi, r\sin\phi)}{r} \right] \end{aligned}$$

Nun findet man R sodass die Terme in der eckigen Klammer kleiner als $\frac{1}{2}$ sind für $r \leq R$. Es gilt also für $r \leq R$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \leq -\frac{1}{2}r^2 < 0 \\ &\Rightarrow E \text{ ist strenge Ljapunoff-Funktion} \\ &\Rightarrow (0,0) \text{ ist asymptotisch stabil} \end{aligned}$$

$\square$