

## 12 Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

### Das Riemann-Integral

Das Riemann-Integral ist definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=|I_i|}$$

$$= S(f, z_n, \sigma_n)$$

mit  $\sigma_n = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  und  $z_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Für  $n \rightarrow \infty$  gilt Gleichheit:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, z_n, \sigma_n)$$

Vergleiche auch Abbildung 8. Diese Definition des Integrals bringt einige Nachteile mit sich:

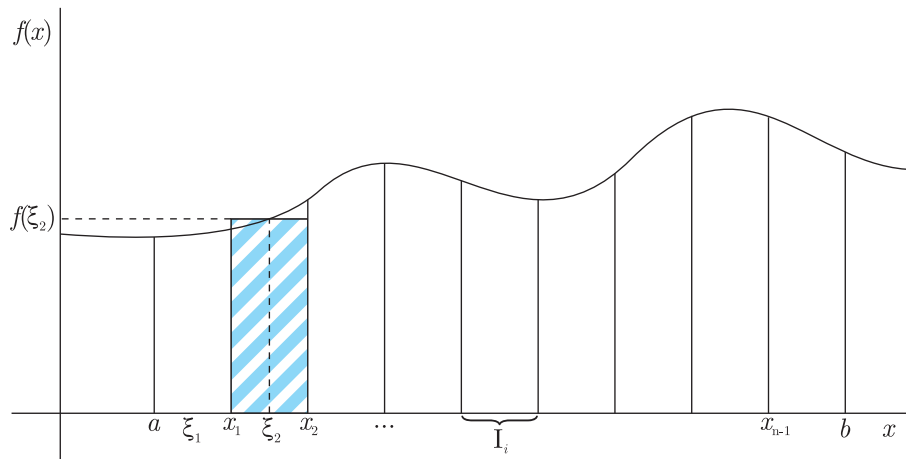


Abbildung 8: Riemann-Integral

- Es gibt eine große Klasse von einfachen Funktionen, die NICHT Riemann-integrierbar ist, zum Beispiel

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ 1 & x \text{ rational} \end{cases}$$

- Sei  $f_n$  stetig und monoton. Dann existiert der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

allerdings ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

nicht Riemann-integrierbar.

- Die Menge

$$\left\{ f \mid \int_a^b |f| dx < \infty \right\}$$

ist nicht abgeschlossen wenn  $f_n \in L$ .

- $\|f\|_1 = \int_a^b |f|(x)dx$ ,  $\|\cdot\|$  keine Norm wenn  $\int f dx$  durch die Riemann-Summe definiert ist.

Alle diese Nachteile behebt das

## Lebesgue-Integral

Das Lebesgue-Integral ist definiert durch

$$\int_a^b f := \sum_k \frac{k}{2^n} \mu A_k^n$$

mit

$$A_k^n = f^{-1} \left( \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right)$$

Das heißt das Bild von  $f$  wird zerlegt. Wenn  $f$  fast überall stetig ist, so sind das Riemann- und das Lebesgue-Integral identisch. Behandle der Einfachheit halber zuerst Riemann-Integrale, da diese einfacher explizit zu berechnen sind.

### 12.1 Definitionen.

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  abgeschlossenes Intervall. Es heißt

$$z := \{x_0, \dots, x_n\} \quad \text{mit } a = x_0 \text{ und } b = x_n$$

Zerlegung von  $[a, b]$  mit Feinheit

$$|z| = \max\{|x_{i-1} - x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Das Intervall  $I$  setzt sich dann zusammen aus

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Dann ist

$$z_1 \times z_2 \times \dots \times z_n$$

Zerlegung von  $I$  mit Feinheit

$$|z| = \max\{|z_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$I_m$  sind Teilrechtecke,  $l \in \{1, \dots, m\}$ . Mit dem System von Zwischenpunkten

$$\sigma := \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$$

ist die zugehörige Riemann-Summe

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad S(f, z, \sigma) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |I_i|$$

Man sagt eine Funktion  $f$  heißt Riemann-integrierbar genau dann, wenn

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z : |z| < \delta \Rightarrow |S(f, z, \sigma) - A| < \epsilon \forall \sigma$$

Es ist dann

$$\int_I f(x) dx = A$$

### 12.2 Bemerkung.

$f$  ist Riemann-integrierbar auf  $I$  ( $f \in \mathcal{R}(I)$ ) genau dann, wenn für alle Folgen mit Zerlegungen  $z_n$  und  $|z_n| \rightarrow 0$  gilt, dass die Riemann-Summe konvergiert für alle Systeme von Zwischenpunkten:

$$S(f, z_n, \sigma_n) \rightarrow \int_I f dx$$

*Beweis.* Dazu gilt nachzuweisen, dass alle Folgen  $S(f, z_n, \sigma_n)$  konvergieren. Ihre Grenzwerte stimmen dann notwendigerweise überein. Die Zerlegung ist eindeutig: Nehme zwei Zerlegungen  $z_n, |z_n| \rightarrow 0$  und  $z'_n, |z'_n| \rightarrow 0$  dann kann man

$$z''_n = z_n \cup z'_n$$

bilden.  $z''_n$  ist so, dass sowohl  $S(f, z_n, \sigma_n)$  als auch  $S(f, z'_n, \sigma'_n)$  Teilfolgen von  $S(f, z''_n, \sigma''_n)$  sind. Also gilt:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, z_n, \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, z'_n, \sigma'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, z''_n, \sigma''_n)$$

□

### 12.3 Satz. Cauchysches Integrabilitätskriterium

Sei  $I \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gilt dann:

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z_1, z_2 \text{ Zerlegung von } I \text{ mit} \\ |z_1| < \delta \text{ und } |z_2| < \delta : |S(f, z_1, \sigma_1) - S(f, z_2, \sigma_2)| < \epsilon \forall \sigma_1, \sigma_2$$

### 12.4 Satz.

Sei  $I \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  $\Rightarrow f$  Riemann-integrierbar.

*Beweis.* Da  $f$  stetig auf  $I$  ist  $f$  gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall J : |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2|I|} \text{ für } x, y \in J \text{ mit } |J| < \delta$$

Wähle zwei Zerlegungen  $z_1$  und  $z_2$  von  $I$ . Es bezeichne  $z$  die Vereinigung der beiden Zerlegungen:  $z = z_1 \cup z_2$ .  $z$  hat dann die Zerlegung  $J_{ij}$  mit Zwischenpunkten  $\eta_{ij}$ . Es ist dann

$$\sum_{j=1}^{k_i} |J_{ij}| = |I_i|$$

Die Riemann-Summen von  $z$  und  $z_1$  sind dann

$$S(f, z_1, \sigma_1) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |I_i| \\ S(f, z, \sigma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} f(\eta_{ij}) |J_{ij}|$$

Bildet man deren Differenz erhält man

$$|S(f, z_1, \sigma_1) - S(f, z, \sigma)| = \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |I_i| - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} f(\eta_{ij}) |J_{ij}| \right| \\ = \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} [f(\xi_i) |J_{ij}| - f(\eta_{ij}) |J_{ij}|] \right| \\ \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} |f(\xi_i) - f(\eta_{ij})| |J_{ij}| \\ < \frac{\epsilon}{2|I|} \underbrace{\sum_{i,j} |J_{ij}|}_{=|I|} = \frac{\epsilon}{2}$$

Analog bildet man die Differenz von  $S(f, z, \sigma)$  und  $S(f, z_2, \sigma_2)$ . Es gilt dann

$$|S(f, z, \sigma) - S(f, z_2, \sigma_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |S(f, z_1, \sigma_1) - S(f, z_2, \sigma_2)| < \epsilon \\ &\Rightarrow f \text{ Riemann-integrierbar} \end{aligned}$$

□

### 12.5 Bemerkung.

$A \subset \mathbb{R}^n$  heißt Nullmenge falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } A \subseteq \bigcup_i I_i \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \epsilon$$

Beispiel:  $\mathbb{Q}^n$  ist Nullmenge.

### 12.6 Satz. Lebesgue

Es sei  $I \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$f$  ist Riemann-integrierbar  $\Leftrightarrow f$  beschränkt und  $\{x \in I \mid f \text{ unstetig in } x\}$  ist Nullmenge

*Beweis.* ohne

□

### 12.7 Satz.

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton.  $\Rightarrow f$  Riemann-integrierbar

*Beweis.* Übung

□

### 12.8 Satz.

Es seien  $I \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ . Dann gilt

(a)  $f + g \in \mathcal{R}(I)$ , das heißt:

$$\int_I (f(x) + g(x)) dx = \int_I f(x) dx + \int_I g(x) dx$$

$cf \in \mathcal{R}(I)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , das heißt:

$$\int_I cf(x) dx = c \int_I f(x) dx$$

(b) Wenn  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in I$

$$\Rightarrow \int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$$

(c)  $|f| \in \mathcal{R}(I)$  und

$$\int_I f(x) dx \leq \int_I |f(x)| dx \leq \sup_{x \in I} |f(x)| |I|$$

(d)  $f^2, g^2, fg \in \mathcal{R}(I)$  und

$$\int_I fg(x) dx \leq \sqrt{\int_I f^2(x) dx} \sqrt{\int_I g^2(x) dx} \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale})$$

*Beweis.* Übung

□

### 12.9 Definition.

Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset I \subset \mathbb{R}^n$ .

$$f_I(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Es gilt dann

$$f \text{ ist Riemann-integrierbar} \Leftrightarrow f_I \in \mathcal{R}(I)$$

Man schreibt

$$\int_A f(x) dx := \int_I f_I(x) dx$$

### 12.10 Definition. Jordan-messbar

$A \subset \mathbb{R}^n$  heißt Jordan-messbar genau dann, wenn die charakteristische Funktion

$$i_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. Der Jordan-Inhalt  $|A|$  ist dann

$$|A| := \int_A i_A(x) dx = \int_A 1 dx$$

Für  $n = 2$  ist der Jordan-Inhalt der Flächeninhalt und für  $n = 3$  das Volumen.

### 12.11 Bemerkung.

Aus Satz 12.6 (Lebesgue) ergeben sich sofort folgende Aussagen:

- (a)  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt.  $A$  ist Jordan-messbar  $\Leftrightarrow \partial A$  (Rand von  $A$ ) ist Nullmenge
- (b)  $A \subset \mathbb{R}^n$  Jordan-messbar und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist

$$f \in \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow f \text{ beschränkt und } \{x \in A \mid f \text{ unstetig in } A\} \text{ ist Nullmenge}$$

- (c) Die Aussagen von Satz 12.8 gelten auch für  $A$  anstelle von  $I$ .
- (d)  $m := \inf\{f(x) \mid x \in A\}$  und  $M := \sup\{f(x) \mid x \in A\}$

$$m|A| \leq \int_A f(x) dx \leq M|A|$$

### 12.12 Satz. Fubini

Seien  $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m$ . Das Intervall  $I \subset \mathbb{R}^{n+m}$  ist dann  $I = I_x \times I_y$ . Sei ferner  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $\forall y \in I_y$  existiere  $g(y) = \int_{I_x} f(x, y) dx$ . Dann ist  $g(y) \in \mathcal{R}(I)$  und

$$\int_I f(z) dz = \int_{I_y} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy$$

*Beweis.* Da  $f$  Riemann-integrierbar ist, kann man schreiben

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z : |z| < \delta : \left| S(f, z, \sigma) - \int_I f(z) dz \right| < \epsilon \forall \sigma$$

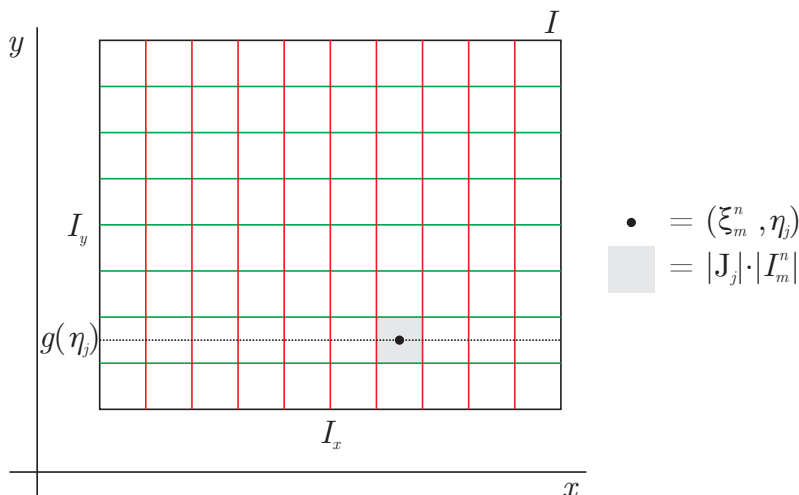


Abbildung 9: Zerlegung des Rechtecks  $I$

Sei nun  $z_n^x = \{\xi_1^n, \dots, \xi_r^n\}$  eine Folge von Zerlegungen (vergleiche Abbildung 9) von  $I_x$  und  $z^y = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$  die Zerlegung von  $I_y$  mit  $|z_n^x|, |z^y| < \delta \forall n \in \mathbb{N}$ . Es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n^x| = 0$ . Setzt man dieses nun oben ein erhält man, dass gelten muss

$$\left| \sum_{m,j} f(\xi_m^n, \eta_j) |I_m^n| |J_j| - \int_I f(z) dz \right| < \epsilon$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\left| \sum_m g(\eta_m) |J_m| - \int_I f(z) dz \right| < \epsilon$$

Verwende, dass

$$g(\eta_j) = \int_{I_x} f(x, \eta_j) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_m f(\xi_m^n, \eta_j) |I_m^n|$$

und

$$\sum_j g(\eta_j) |J_j| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j \sum_m f(\xi_m^n, \eta_j) |I_m^n| |J_j|$$

Schreibe also um das obige zu zeigen

$$\begin{aligned} \left| \sum_j g(\eta_j) |J_j| - \int_I f(z) dz \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j \sum_m f(\xi_m^n, \eta_j) |I_m^n| |J_j| - \int_I f(z) dz \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_j \sum_m f(\xi_m^n, \eta_j) |I_m^n| |J_j| - \int_I f(z) dz \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow g \in \mathcal{R}(I), \int_{I_y} g(y) dy = \int_I f(z) dz \end{aligned}$$

□

### 12.13 Beispiel. Kreisscheibe mit Radius 1

Im rechten oberen Quadranten ist die Kreisscheibe definiert durch die Funktion  $y = \sqrt{1-x^2}$ , im rechten unteren Quadranten durch  $y = -\sqrt{1-x^2}$ . Die Fläche ist dann

$$\int_A 1 dx = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \right) dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Substituiere nun  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ . Es ergibt sich

$$2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 2 \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi$$

#### 12.14 Beispiel.

$$\int_1^4 \left( \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y) dy \right) dx = \int_1^2 \left( \int_1^{y^2} f(x,y) dx \right) dy$$

#### 12.15 Korollar.

Sei  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt:

$$\int_I f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1$$

#### 12.16 Satz.

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$  beschränkt und Jordan-messbar und  $f \in \mathcal{R}(A)$ . Es sei weiterhin

$$P_n(A) = \{x \mid \exists y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\}$$

und

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}$$

Ferner existiere

$$g(x) = \int_{A_x} f(x, y) dy$$

dann existiert

$$\int_{P_n(A)} g(x) dx$$

und es gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{P_n(A)} \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx$$

*Beweis.* folgt aus Fubini. □

#### 12.17 Korollar.

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und Jordan-messbar sowie  $a < b \in \mathbb{R}$  so, dass

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A : a \leq x_1 \leq b$$

und

$$\forall \xi \in [a, b] : Q(\xi) = A \cap \{(\xi, x_2, \dots, x_n)\}$$

in  $\mathbb{R}^{n-1}$  Jordan-messbar mit  $(n-1)$ -dimensionalem Inhalt  $g(\xi)$ . Dann ist

$$|A| = \int_a^b g(\xi) d\xi$$

## Integrieren über Normalbereiche

Betrachte die Mengen (Abbildung 10)

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

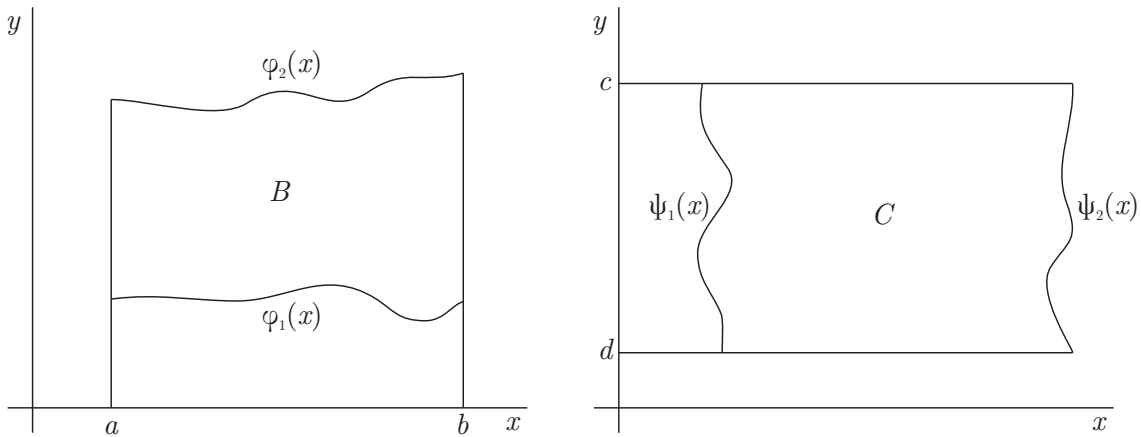


Abbildung 10: Normalbereiche

### 12.18 Satz.

Sei  $f : B, C \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Es gilt für das Integral von  $f$ :

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

und

$$\int_C f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Für  $A$  gilt

$$\int_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

### 12.19 Beispiel.

Sei  $B$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  das begrenzt ist durch  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ , das heißt:

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$$



Sei außerdem  $f(x, y) = x$ . Gesucht ist jetzt  $\int_B f(z) dz$ . Es ist

$$\begin{aligned} \int_B f(z) dz &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} x dy dx \\ &= \int_0^1 x(x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

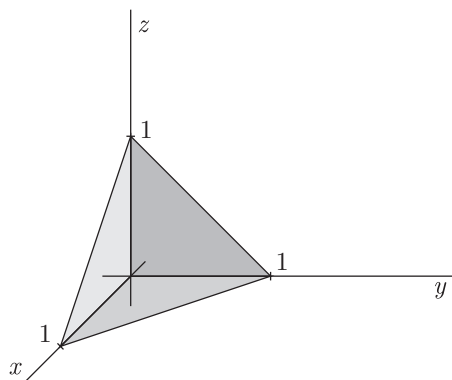


Abbildung 11: Die Flächen umschließen einen Tetraeder

### 12.20 Beispiel.

Berechne das Volumen des Bereichs, der durch die Flächen  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = 1$  begrenzt wird (Abbildung 11). Die Menge der Punkte innerhalb des eingeschlossenen Bereichs ist

$$A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Das Volumenintegral lautet dann

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ (y - xy - \frac{y^2}{2}) \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 1 - x - x(1 - x) - \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 1)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

### 12.21 Satz. Substitutionsregel

Die Integration über krummlinige Gebiete lässt sich oft auf ein Integral über ein ( $n$ -dimensionales) Rechteck reduzieren. Die Information darüber, wie sehr jeder Punkt durch die Abbildung gestaucht oder gestreckt wird, ist natürlich wichtig für die Gewichtung.

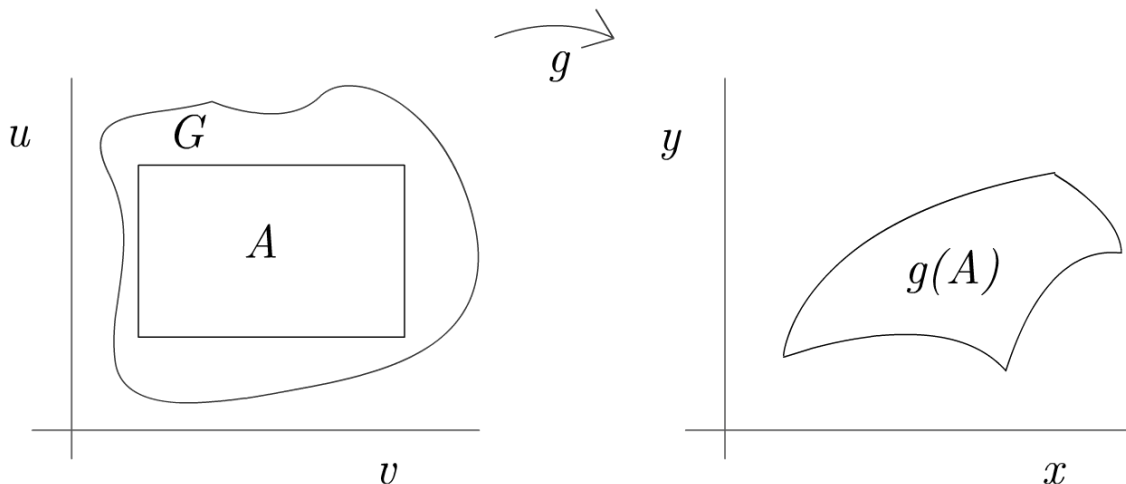


Abbildung 12: Darstellung der Substitution

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und Jordan-messbar.  $A \subseteq G, G$  offen, sodass  $g \in C'(G, \mathbb{R}^n)$ , mit

$$\det g'(z) > 0 \text{ oder} \\ \det g'(z) < 0 \forall z \in G$$

und  $g$  injektiv. Sei  $f : g(A) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt:

$$\int_{g(A)} f(x) dx = \int_A (f(g(z)) |\det g'(z)| dz$$

Dass die Determinante diese Eigenschaft besitzt sei hier für zwei Dimensionen verdeutlicht.

$$x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v)$$

Ein Flächenstück in  $A$  sei ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\Delta u \Delta v$ . Unter der Abbildung  $g$  verformt es sich. Unter der Annahme, dass es genügend klein ist, betrachten wir es als Parallelogramm. Die Richtung der aufspannenden Vektoren ist gegeben durch die Ableitungen von  $g$  längs der alten Koordinaten  $u$  und  $v$ :

$$\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v} \in \mathbb{R}^2$$

Die Fläche des Parallelogramms ist gegeben durch

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$$

Da wir das Kreuzprodukt nur im  $\mathbb{R}^3$  definiert haben, führen wir eine Transformation durch, welche jedem Vektor die z-Komponente 0 anfügt.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

So sieht man den Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt der Richtungsableitungen und Determinante der Funktionalmatrix von  $g'$ :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right| = \left| \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_2}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = |\det g'(z)|$$

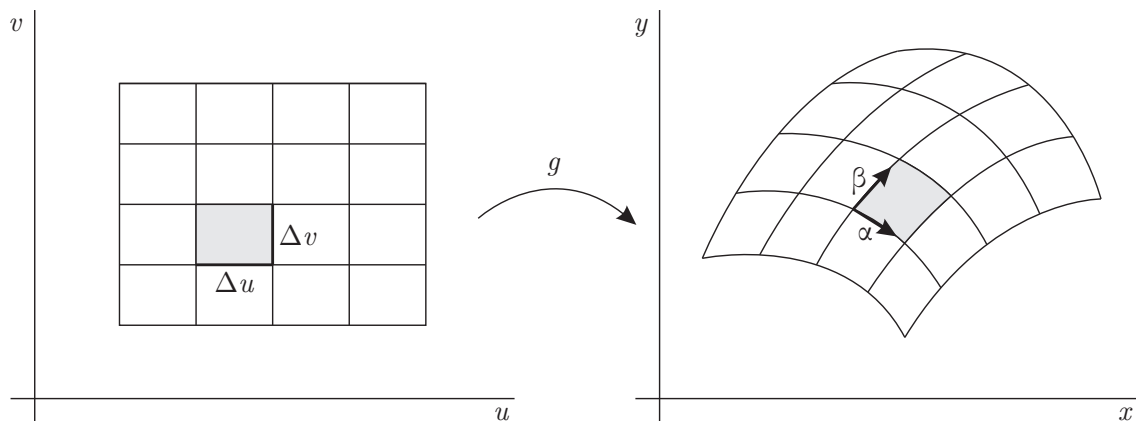


Abbildung 13: Transformation von Parallelogramm auf Rechteck. Im Bild ist  $\alpha = \frac{\partial g}{\partial u}$  und  $\beta = \frac{\partial g}{\partial v}$

Die Substitutionsregel analog im n-dimensionalen Fall mit

$$z = (x_1, \dots, x_n), \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g'(z) = \frac{\partial g}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \quad (n \times n \text{ Matrix})$$

(a) POLARKOORDINATEN

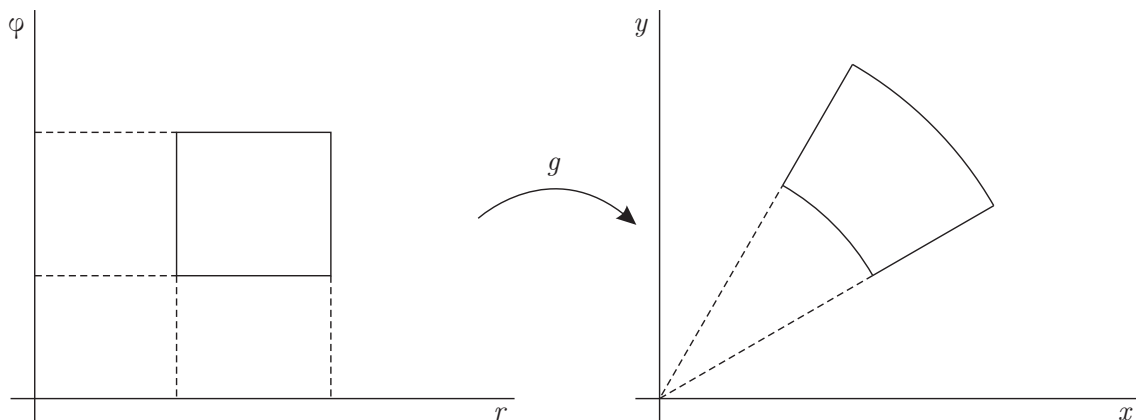


Abbildung 14: Transformation von kartesischen zu Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\det g'(z)| = r$$

Für das Integral bedeutet dies:

$$\int_{g(A)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, dr \, d\varphi$$

(b) ZYLINDERKOORDINATEN

Für Zylinderkoordinaten ist das Volumenelement das gleiche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\det g'| = r$$

mit dem Volumenelement  $dV = dx dy dz$  lautet das Integral:

$$\int_{g(A)} f(x, y, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

(c) KUGELKOORDINATEN Die Berechnung des Volumenelements für Kugelkoordinaten:

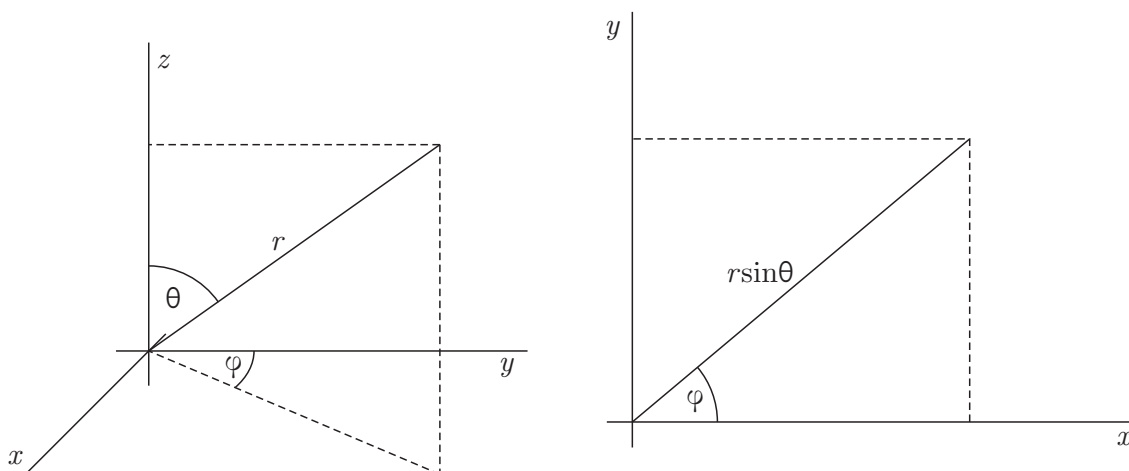


Abbildung 15: Die Transformation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= g \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \\
\Rightarrow g' &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \det g' &= \cos \theta \det \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \\
&\quad - (-r \sin \theta) \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \\
&= (r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) \\
&\quad + r \sin \theta (r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\
&= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \sin \theta \sin^2 \varphi \\
&= r^2 \sin \theta
\end{aligned}$$

### 12.22 Beispiel.

Es sei ein Zylinder gegeben, aus welchem am unteren Ende eine Halbkugel mit dem selben Radius herausgeschnitten ist. Mit anderen Worten, der Boden wird ersetzt durch die Oberfläche einer Halbkugel. Die Höhe sei 4, ( $0 \leq z \leq 4$ ), der Radius sei 1 ( $r \leq 1$ ), und der Boden  $z = \sqrt{1-r^2}$ . Das Volumen sei  $V$ , vergleiche Abbildung 16.

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{1-r^2}}^4 r \, dz \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - \sqrt{1-r^2}) r \, dr \, d\varphi \\
&= 2\pi \left[ 2r^2 + \frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1
\end{aligned}$$

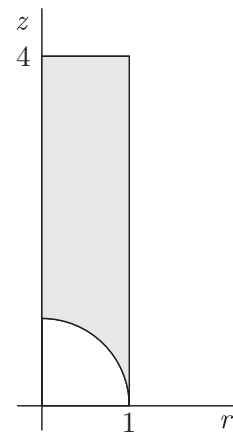


Abbildung 16

### 12.23 Beispiel.

Gegeben ist eine Kugel mit Radius 1, in welche ein umgekehrter Kegel mit Öffnungswinkel  $\frac{\pi}{2}$  reingelegt ist. Gesucht ist das Volumen zwischen dem Kegel und der Kugel. Die Kugel ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch  $z = \sqrt{1-r^2}$ , der Kegel durch  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Das Volumenintegral lautet dann

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\varphi$$

Das selbe Volumen lässt sich einfacher in Kugelkoordinaten ausdrücken:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

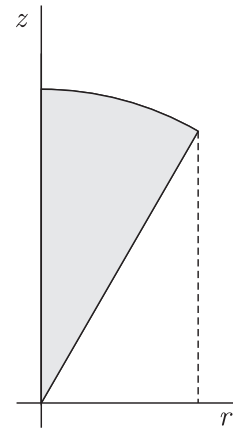


Abbildung 17