

13 Kurvenintegrale

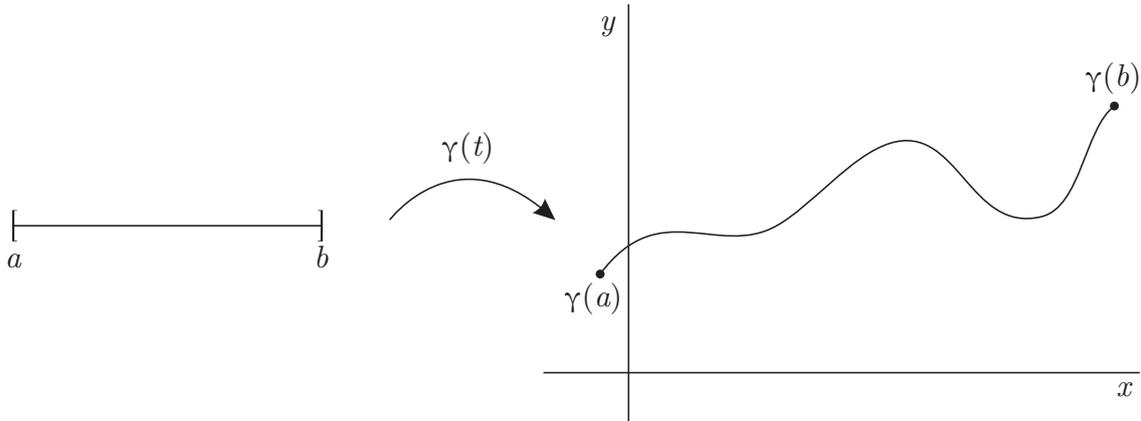


Abbildung 18: Kurve mit Parameterdarstellung γ

13.1 Definition. Parameterdarstellung (a) Sei $a < b$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt PARAMETERDARSTELLUNG einer Kurve mit Parameterintervall $[a, b]$. Der Anfangspunkt der Kurve ist $\gamma(a)$, der Endpunkt ist $\gamma(b)$.

(b) Zwei Parameterdarstellungen

$$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißten ÄQUIVALENT genau dann, wenn es eine stetige, monoton wachsende Abbildung von einem Intervall in das andere gibt:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \exists \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] \text{ stetig und monoton wachsend}$$

Es ist dann $\gamma_2(t) = \gamma_1 \circ \varphi(t)$.

13.2 Definition. Länge einer Kurve

Die Länge einer Kurve lässt sich annähern durch eine Aneinanderreihung von geraden Stücken (vgl. Abbildung 19). Das Supremum für beliebig viele solcher Stücke ist dann die Länge der Kurve:

$$L := \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \mid m \in \mathbb{N}, \{t_0 = a, t_1, \dots, t_m = b\} \text{ ist Zerlegung von } [a, b] \right\}$$

13.3 Definition.

Sei C eine Kurve mit Parameterdarstellung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. C heißt rektifizierbar genau dann, wenn die Länge der Kurve endlich ist:

$$C \text{ heißt rektifizierbar} \Leftrightarrow L(C) < \infty$$

13.4 Satz.

Die Begriffe „rektifizierbar“ und Länge einer Kurve hängen nicht von der speziellen Parameterdarstellung ab.

Beweis. Seien γ_1 und γ_2 Parameterdarstellungen einer Kurve mit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ und dadurch $\gamma_1(t) = \gamma_2 \circ \varphi(t)$, $\{t_0, \dots, t_m\}$ sei Zerlegung von $[a, b]$. Dann ist $\{\varphi(t_0), \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_m)\}$ Zerlegung von $[c, d]$. Es gilt dann

$$\sum_{i=1}^m \|\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^m \|\gamma_2(\varphi(t_i)) - \gamma_2(\varphi(t_{i-1}))\|$$

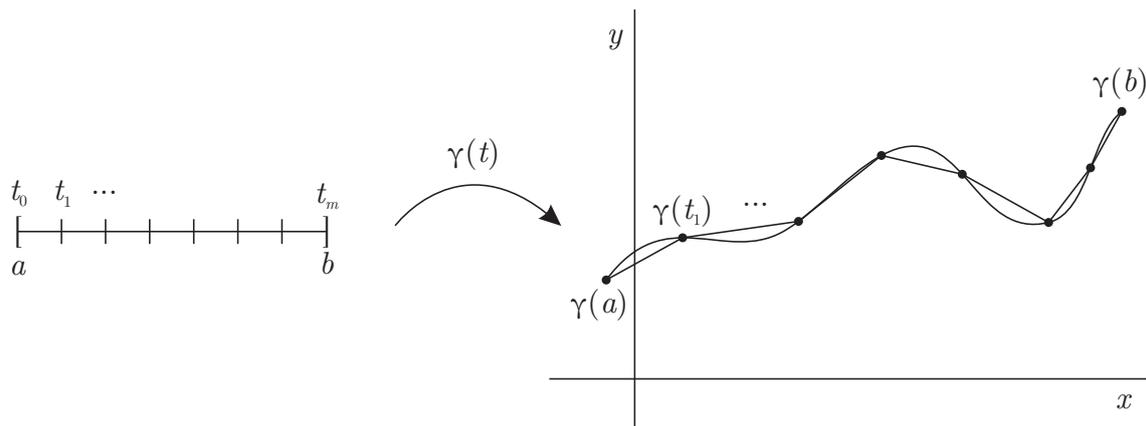


Abbildung 19: Annäherung einer Kurve durch Polygone

Die Länge der ersten Kurve

$$L_1 = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})\| \mid \{t_0, \dots, t_m\} \text{ Zerlegung von } [a, b] \right\}$$

ist dann definitionsgemäß kleiner als die der zweiten Kurve:

$$\Rightarrow L_1 \leq L_2$$

Verwendet man andersherum die Umkehrfunktion von φ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &= \gamma_1 \circ \varphi^{-1}(t) \\ \Rightarrow L_2 &\leq L_1 \end{aligned}$$

Also müssen die beiden Längen gleich sein

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

□

13.5 Definitionen.

Zu Kurven:

- (a) Eine Kurve C heißt stetig differenzierbar, wenn es eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung gibt.
- (b) Eine Kurve heißt Jordan-Kurve, wenn eine Parameterdarstellung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert und diese injektiv ist.
- (c) Seien C_1, C_2 Kurven in \mathbb{R}^n mit Parameterdarstellungen $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Der Endpunkt von C_1 sei der Anfangspunkt von C_2 . Dann heißt die durch die Parameterdarstellung

$$\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

dargestellte Kurve Summe von C_1 und C_2 , man schreibt: $C_1 + C_2$. Unter $-C_1$ versteht man die Kurve mit Parameterdarstellung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t \mapsto \gamma_1(b + t(a - b))$$

mit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (d) Eine Kurve C heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn stetig differenzierbare Kurven C_1, \dots, C_n mit $C = C_1 + \dots + C_n$ existieren.

13.6 Satz.

Sei C stetig differenzierbare Kurve in \mathbb{R}^n mit Parameterdarstellung $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$L(C) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt < \infty$$

Beweis. Es sei $z = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_m = b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit Feinheit $|z|$. Nähere die Länge der Kurve durch eine Aneinanderreihung von geraden Stücken an:

$$V_z(\gamma) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Es ist zu zeigen, dass

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |z| < \delta \quad \left| V_z(\gamma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| < \epsilon$$

Bemerke, dass der Differenzvektor $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ sich aus n Komponenten zusammensetzt:

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = (\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}), \dots, \gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1}))$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es nun einen Zwischenpunkt $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \mathbb{R}^n$ sodass gilt

$$(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}), \dots, \gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1})) = (\gamma_1'(\tau_i^1)(t_i - t_{i-1}), \dots, \gamma_n'(\tau_i^n)(t_i - t_{i-1})) = \gamma'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

mit $\gamma'(t_i) = (\gamma_1'(\tau_i^1), \dots, \gamma_n'(\tau_i^n))$. Es folgt damit für V_z :

$$V_z(\gamma) = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(\tau_i)\| dt$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \left| V_z(\gamma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| &\leq \sum_{i=1}^m \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(\tau_i)\| dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \|\gamma'(\tau_i)\| - \|\gamma'(t)\| \right| dt = (*) \end{aligned}$$

Es gilt für den Integranden:

$$\left| \|\gamma'(\tau_i)\| - \|\gamma'(t)\| \right| \leq \|\gamma'(\tau_i) - \gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma_k'(\tau_i^k) - \gamma_k'(t)|^2}$$

Wähle nun δ so, dass für $|t - s| < \delta$, $t, s \in [a, b]$

$$|\gamma_k'(s) - \gamma_k'(t)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}(b-a)} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

γ' ist stetig und insbesondere gleichmäßig stetig auf dem definierten Intervall, also gilt

$$\begin{aligned}
 (*) &\leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(\tau_i) - \gamma'_k(t)|^2} dt \\
 &< \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{n\epsilon^2}{n(b-a)^2}} (t_i - t_{i-1}) = \epsilon
 \end{aligned}$$

□

13.7 Beispiel.

Zur Länge einer Kurve

- (a) Möchte man die Länge einer eindimensionalen Funktion auf einem Intervall bestimmen, so wählt man die Parametrisierung

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

Die Ableitung γ' ist dann

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))$$

Damit ist die Länge

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

- (b) Gegeben sei eine Ellipse durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Deren Ableitung nach t lautet

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

Die Ellipse wird im mathematisch positiven Sinne (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen, der Startpunkt liegt bei $(a, 0)$. Die Länge ist

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt \quad \text{mit } k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} a \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt
 \end{aligned}$$

13.8 Bemerkung.

Es bezeichne die $s(t)$ die Bogenlänge einer Kurve

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau \quad \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|$$

Parametrisiert man die Kurve nun mit s , sprich $t \mapsto s(t)$ so kann man umgekehrt auch $s \mapsto t(s)$ verwenden, ist dann

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma \circ t(s) = \gamma(t(s))$$

Der Geschwindigkeitsvektor dieser Bogenlängenparametrisierung ist

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{d}{ds} \tilde{\gamma} = \frac{d}{ds} (\gamma(t(s))) = \gamma' \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|}$$

Der neue Geschwindigkeitsvektor ist also normiert:

$$\Rightarrow \|\tilde{\gamma}'\| = 1$$

13.9 Definitionen.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung der Kurve C , $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

(a) Das Kurvenintegral von \mathbf{F} längs der Kurve C ist

$$\int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Symbolisch schreibt man

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

(b) $\mathbf{F} = (P, Q)$ für $n = 2$, $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ für $n = 3$. Man schreibt

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

13.10 Satz.

Seien C_1, C_2 stückweise stetig differenzierbare Kurven und $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

(a)

$$\int_{-C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

(b)

$$\int_{C_1+C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

(c)

$$\left| \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{x \in C_1} \|\mathbf{F}(x)\| L(C_1)$$

Beweis. (c) Sei γ Parametrisierung von C_1

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt \\ &\leq \sup_{x \in C_1} \|\mathbf{F}(x)\| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \sup_{x \in C_1} \|\mathbf{F}(x)\| L(C_1) \end{aligned}$$

□

13.11 Beispiel.

In der $x - y$ -Ebene sei das Vektorfeld \mathbf{F} gegeben durch

$$\mathbf{F} = (y, y - x)$$

oder in der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, Q) \text{ mit } P = y \text{ und } Q = y - x.$$

Wir betrachten zwei Kurven vom Ursprung nach $(1, 1)$, gegeben durch C_1 und C_2 . C_1 ist zusam-

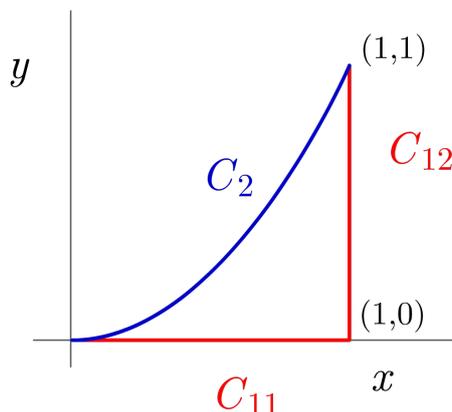


Abbildung 20: Zwei Kurven

mengesetzt aus einem horizontalen Stück nach $(1, 0)$, C_{11} und einem vertikalen Stück von dort bis zum Endpunkt, C_{12} . Wir verwenden folgende Parametrisierung für C_1 :

$$C_{11} : \gamma_{11}(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_{12} : \gamma_{12}(t) = (1, t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

So folgt für die Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{C_{11}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_{11}(t)) \cdot \gamma'_{11}(t) dt \\ &= \int_0^1 (0, 0 - 1) \cdot (1, 0) dt = 0 \\ \int_{C_{12}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_{12}(t)) \cdot \gamma'_{12}(t) dt \\ &= \int_0^1 (t, t - 1) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_0^1 (t - 1) dt = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Kurve C_2 sei gegeben durch ein Stück einer Parabel $y = x^2$.

$$C_2 : \gamma_2(t) = (t, t^2) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Oder als einzelne Parameter x und y betrachtet:

$$x(t) = t, y(t) = t^2$$

so hat das Integral die Form

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{C_2} P dx + Q dy \\ &= \int_0^1 y \frac{dx}{dt} dt + \int_0^1 (y-x) \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (t^2-t) 2t dt \\ &= \frac{1}{3} + 2 \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

13.12 Definition. Gradientenfeld

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet. \mathbf{F} heißt GRADIENTENFELD $\Leftrightarrow \exists \varphi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ ist Skalarfeld mit $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.
 $-\varphi$ heißt Potential, φ Stammfunktion.

13.13 Satz.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges Gradientenfeld mit Stammfunktion $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Sei C Kurve in \mathbb{R}^n mit Anfangspunkt $a \in \mathbb{R}^n$ und Endpunkt $b \in \mathbb{R}^n$. Das Kurvenintegral hängt dann lediglich von diesen Punkten ab:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dx = \varphi(a) - \varphi(b)$$

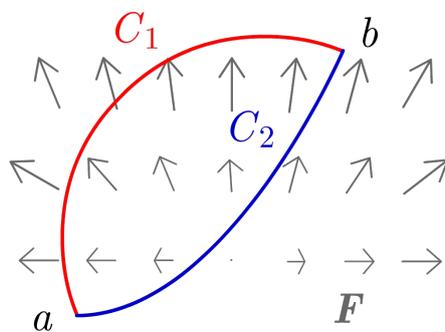


Abbildung 21: Ein konservatives Kraftfeld, das von 2 verschiedenen Kurven durchlaufen wird.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^1 \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) dt \\
 &= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) \\
 &= \varphi(b) - \varphi(a)
 \end{aligned}$$

□

13.14 Definition.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, \mathbf{F} stetiges Vektorfeld $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt konservativ genau dann, wenn $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \forall C_1, C_2$ (stückweise stetig differenzierbar) mit Anfangspunkt a und Endpunkt b gilt:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

13.15 Satz.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann:

$$\mathbf{F} \text{ ist konservativ} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ ist Gradientenfeld}$$

Beweis. Eine Richtung haben wir schon gezeigt.

” \Leftarrow ”: Siehe oben

” \Rightarrow ”:

$$\varphi(x) = \int_a^x \mathbf{F}(z) \cdot dz$$

Es muss eine differenzierbare Funktion φ geben mit

$$\nabla\varphi = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \varphi(x+h) - \varphi(x) = \mathbf{F}(x) \cdot h + \psi(h)$$

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_a^{x+h} \mathbf{F}(z) \cdot dz - \int_a^x \mathbf{F}(z) \cdot dz = \int_x^{x+h} \mathbf{F}(z) \cdot dz$$

$$\gamma : t \mapsto x + th \quad t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^n$$

$$\int_0^1 \mathbf{F}(x+th) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(x+th) \cdot h dt$$

$$= \mathbf{F}(x) \cdot h + \left[\int_0^1 \mathbf{F}(x+th) \cdot h dt - \mathbf{F}(x) \cdot h \right]$$

$$= \mathbf{F}(x) \cdot h + \psi(h)$$

$$\begin{aligned}
\psi(h) &= \int_0^1 \mathbf{F}(x+th) \cdot h - \mathbf{F}(x) \cdot h \\
&= \int_0^1 [\mathbf{F}(x+th) - \mathbf{F}(x)] \cdot h \, dt \\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(x) \cdot h \, dt \\
\Rightarrow \|\psi(h)\| &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|\mathbf{F}(x+th) - \mathbf{F}(x)\| \cdot \|h\| \\
\Leftrightarrow \frac{\|\psi(h)\|}{\|h\|} &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|\mathbf{F}(x+th) - \mathbf{F}(x)\| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \text{ da } \mathbf{F} \text{ stetig.}
\end{aligned}$$

□

Sei \mathbf{F} ein Gradientenfeld und $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\nabla\varphi = \mathbf{F}$. Die Partiellen Ableitungen von φ sind die Komponenten von \mathbf{F} :

$$\begin{aligned}
\partial_x \varphi &= F_1 \\
\partial_y \varphi &= F_2 \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} F_1 \text{ und} \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} F_2
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass φ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, sodass die Ableitungen vertauschen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} F_1 &= \frac{\partial}{\partial x} F_2
\end{aligned}$$

13.16 Beispiel.

$\mathbf{F} = (P, Q)$ Gradientenfeld

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Nun ist das Skalarfeld φ zu finden mit $\nabla\varphi = \mathbf{F}$

$$\begin{aligned}
P = 2xy & \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x \\
Q = x^2 + 4y & \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = \varphi_x &= 2xy \\
\Rightarrow \varphi &= x^2 y + c(y) \\
Q = \varphi_y &= x^2 + c'(y) = x^2 + 4y \\
\Rightarrow c'(y) &= 4y \\
\Rightarrow c(y) &= 2y^2 \\
\Rightarrow \varphi &= x^2 y + 2y^2 \\
\Rightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \varphi(b) - \varphi(a)
\end{aligned}$$

Mit Start und Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}^2$.

13.17 Definition.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt STERNFÖRMIG, wenn es einen Punkt a gibt, von dem jeder Punkt der Menge mit einer Geraden durch a verbunden werden kann.

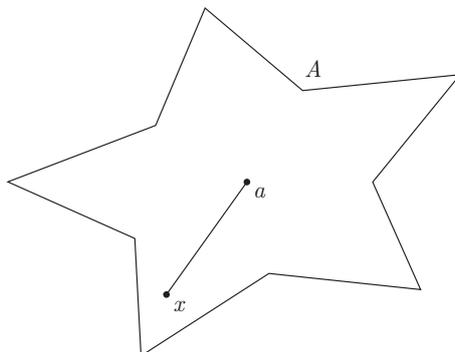


Abbildung 22: Eine sternförmige Menge

13.18 Definition.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt KONVEX, wenn zwei beliebige Punkte der Menge durch eine Gerade verbunden werden können. Insbesondere ist jede konvexe Menge sternförmig.

13.19 Satz.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ein Gebiet, $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Ist $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ Gradientenfeld, so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F_j = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

Ist A sternförmig (konvex), so gilt auch die Umkehrung, also aus (1) folgt \mathbf{F} ist Gradientenfeld.

Beweis. (Nur für konvex) Die Gerade sei parametrisiert durch $\gamma(t) = a + t(x - a)$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_a^x \mathbf{F}(\mathbf{z}) \cdot d\mathbf{z} \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(a + t(x - a)) \cdot (x - a) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 F_k(a + t(x - a)) \cdot (x_k - a_k) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) &= \int_0^1 F_j(a + t(x - a)) dt + \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} F_k \right) (a + t(x - a)) t \cdot (x_k - a_k) dt \\
&= \int_0^1 F_j(a + t(x - a)) dt + \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F_j \right) (a + t(x - a)) \cdot (x_k - a_k) t dt \\
&= \int_0^1 F_j(a + t(x - a)) dt + \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} F_j(a + t(x - a)) \right) t dt \\
&= \int_0^1 F_j(a + t(x - a)) dt + F_j(a + t(x - a)) t \Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 F_j(a + t(x - a)) dt \\
&= F_j(x)
\end{aligned}$$

□

13.20 Korollar.

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ konvex und $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R})$. Dann gelten folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F} \text{ ist konservativ} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ ist Gradientenfeld} \\
&\mathbf{F} = \nabla \varphi, \varphi : A \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ ist rotationsfrei (rot } \mathbf{F} = 0) \\
&\mathbf{F} \text{ konservativ} \Leftrightarrow \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \text{ für beliebiges } C_1 \text{ und } C_2 \\
&\hspace{10em} \text{mit gleichem Anfangs- und Endpunkt} \\
&\Leftrightarrow \varphi(x) = \int_a^x \mathbf{F}(z) dz
\end{aligned}$$

Es vertauschen die ersten Ableitungen der Komponenten von $\mathbf{F} = (F^1, F^2, F^3)$:

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}$$

13.21 Bemerkung. Masse

Mit einer Dichtefunktion $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, der Bogenlänge $S(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ und dem Zwischenpunkt t'_i , der zwischen t_i und t_{i-1} liegt, ist die Masse gegeben durch

$$\sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t'_i)) \cdot \underbrace{(S(t_i) - S(t_{i-1}))}_{\approx S'(t_i)(t_i - t_{i-1})}$$

Es ergibt sich als Grenzwert

$$\begin{aligned}
M &= \int_a^b \rho(\gamma(t)) S'(t) dt \\
&= \int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt
\end{aligned}$$

13.22 Definition.

Es sei f eine skalare Funktion, das Linienintegral über die Kurve C ist

$$\int_C f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

13.23 Bemerkung.

Es bezeichne \mathbf{T} den normierten Tangentialvektor zu einer Kurve, die durch $\gamma(t)$ parametrisiert ist:

$$\mathbf{T}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Damit kann man das Wegintegral über ein Vektorfeld \mathbf{F} umschreiben:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \mathbf{T}(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \end{aligned}$$

mit dem Linienelement $ds = \|\gamma'(t)\| dt$. Wenn nun $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 1$ ist, gilt

$$\int_C f ds = \int_C 1 ds = L(C)$$

13.24 Definition.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Der Rand von D (∂D) besteht aus endlicher Vereinigung stückweiser stetig differenzierbarer Jordan-Kurven $C_i, i \in \{1, \dots, n\}$. C_i heißt POSITIV ORIENTIERT falls γ_i , Parametrisierung von C_i , so ist, dass der Vektor $(-\gamma'_2, \gamma'_1)$ in D hineinzeigt. Anders formuliert: D liegt links von γ_i .

13.25 Satz. Green'scher Integralsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (F^1, F^2) = (P, Q) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. $C = \partial D$ sei positiv orientierte Randkurve. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \iint_D \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) d(x, y) \\ &= \iint_D (Q_x - P_y) d(x, y) \end{aligned}$$

Beweis. Annahme: D ist Normalbereich, das heißt

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &\stackrel{!}{=} \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

Siehe auch Abbildung 23. Wir zeigen zuerst, dass

$$\oint_{\partial D} P dx = - \iint_D P_y d(x, y)$$

Parametrisiere dazu

$$\begin{aligned} C_1 : \gamma_1(t) &= (t, \varphi_1(t)) \quad a \leq t \leq b \\ -C_2 : \gamma_2(t) &= (t, \varphi_2(t)) \quad a \leq t \leq b \end{aligned}$$

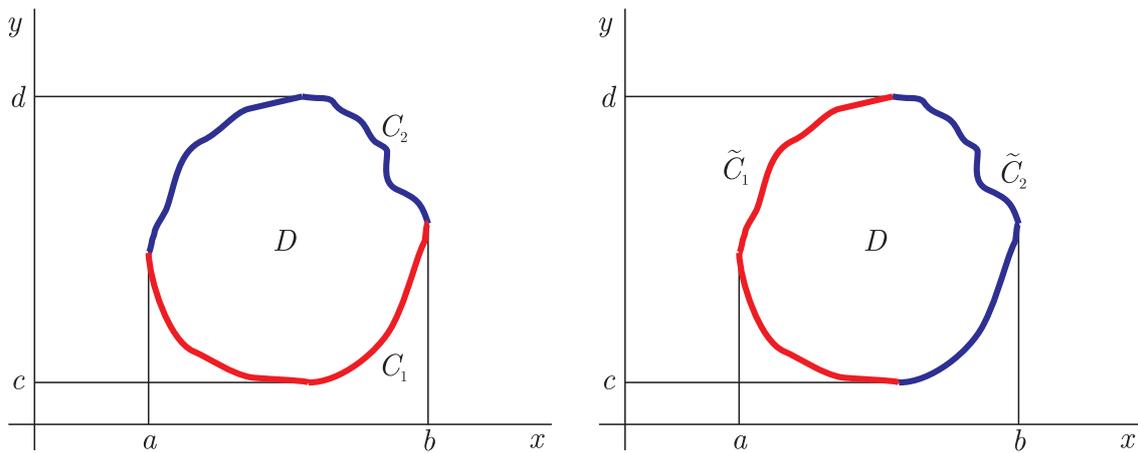


Abbildung 23: Der selbe Bereich D wird mit verschiedenen Kurven umrundet

Es ist dann

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial D} P dx &= \int_a^b P(\gamma_1(t))(\gamma_1'(t))_1 dt - \int_a^b P(\gamma_2(t))(\gamma_2'(t))_2 dt \\
 &= \int_a^b P(\gamma_1(t)) dt - \int_a^b P(\gamma_2(t)) dt \\
 &= \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt \\
 &= - \int_a^b (P(t, \varphi_2(t)) - P(t, \varphi_1(t))) dt \\
 &= - \int_a^b \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) dy dt \\
 &= - \int_a^b \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx
 \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt der Hauptsatz der Integralrechnung angewendet wurde:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

Nun zeigen wir weiterhin, dass

$$\int_C Q dy = \iint_D Q_x d(x, y)$$

Seien dazu die Kurven $-\tilde{C}_1 = (\psi_1(y), y)$, $\tilde{C}_2 = (\psi_2(y), y)$, spalte das Integral dementsprechend auf:

$$\begin{aligned} \int_C Q dy &= \int_{\tilde{C}_1} Q dy + \int_{\tilde{C}_2} Q dy \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy \\ &= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Q_x(x, y) dx dy \\ &= \iint_D Q_x d(x, y) \end{aligned}$$

□

13.26 Bemerkung.

Möchte man den Fluss eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (P, Q)$ durch eine Kurve $C = \partial D$ berechnen, welche durch die Parametrisierung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

gegeben ist, so benötigt man dazu den Normalenvektor

$$\mathbf{N} = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$

Der Fluss ist dann

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot (\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)) \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} dt \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t))\gamma_2'(t) - Q(\gamma(t))\gamma_1'(t)) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{G} \cdot \gamma'(t) dt & \mathbf{G} &= (-Q, P) = (G^1, G^2) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} G^2 - \frac{\partial}{\partial y} G^1 \right) d(x, y) \\ &= \iint_D (\partial_x P + \partial_y Q) d(x, y) \\ &= \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} d(x, y) \end{aligned}$$

wobei der Satz von Green angewendet wurde. Es ergibt sich also

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} d(x, y)$$

13.27 Korollar.

Sei $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y, x)$ und C positiv orientierte Randkurve des Gebiets D . Dann gilt:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_C P dx + Q dy = |D| = \text{Flächeninhalt von } D$$

Beweis. Nach Green gilt

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_C P dx + Q dy \\
 &= \iint_D (Q_x - P_y) d(x, y) \\
 &= \iint_D \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) d(x, y) \\
 &= \iint_D 1 d(x, y) \\
 &= |D|
 \end{aligned}$$

□

Mithilfe dieser Tatsache kann man durch Umfahren einer Fläche deren Flächeninhalt bestimmen, zum Beispiel mit einem Planimeter.

13.28 Bemerkung.

Ist das Vektorfeld \mathbf{F} von der Form $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$, so ist $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, Q_x - P_y)$. Wendet man den Satz von Green an, erhält man:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \iint_D (Q_x - P_y) d(x, y) \\
 &= \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d(x, y) \\
 &= \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned}$$

Oberflächenintegrale

13.29 Definition.

Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Ist $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so heißt $\varphi|_K$ PARAMETERDARSTELLUNG einer Fläche in \mathbb{R}^3 . Sei weiterhin $T \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, ψ Parameterdarstellung mit Parameterbereich T . Die beiden Abbildungen φ und ψ sind ÄQUIVALENT, wenn $\psi = \varphi \circ g$, $g : T \rightarrow K$ injektiv und stetig differenzierbar und entweder $\det g' > 0$ oder $\det g' < 0$ auf T ist.

13.30 Beispiel.

Betrachte konkrete Beispiele zur Anschauung

- (a) Um die Oberfläche, die die obere Hälfte der Einheitskugel beschreibt zu parametrisieren orientiert man sich an den Kugelkoordinaten. Man erhält dann als Parametrisierung:

$$\varphi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

- (b) Die Parameterdarstellung der Oberfläche eines Zylinders mit Radius 1 und Höhe 2 lautet

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 \leq v \leq 2$$

- (c) Eine ebene Fläche wird parametrisiert durch Linearkombination der aufspannenden Vektoren (mit Startpunkt A):

$$\varphi(u, v) = A + \vec{a}u + \vec{b}v$$

(d) Der Graph der Funktion $z = f(x, y)$ ist

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

13.31 Definition.

Sei $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung der Fläche A . Der Flächeninhalt von A ist

$$I(A) = \iint_K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| d(u, v) = \iint_A 1 dS$$

13.32 Definition.

Sei $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung einer Fläche $A \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Sei f stetiges Skalarfeld auf A , $f \in C(\varphi(K), \mathbb{R})$. Dann ist das Oberflächenintegral von f über A symbolisch definiert durch

$$\iint_A f dS = \iint_K f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| d(u, v)$$

(b) Sei \mathbf{F} stetiges Vektorfeld auf A , $\mathbf{F} \in C(\varphi(A), \mathbb{R}^3)$. Mit dem Normalenvektor

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

ist dann das Oberflächenintegral von \mathbf{F} auf A gegeben durch

$$\begin{aligned} \iint_K \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot \mathbf{N} \|\varphi_u \times \varphi_v\| d(u, v) &= \iint_K \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) d(u, v) \\ &= \iint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad \text{(symbolisch)}$$

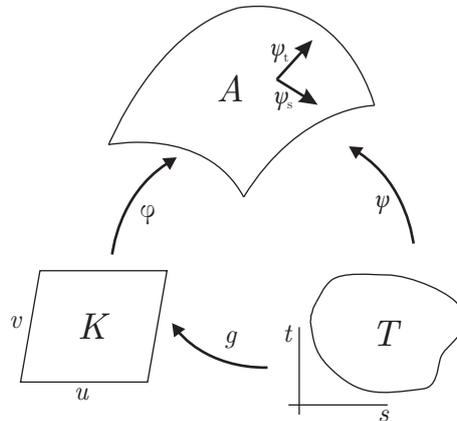


Abbildung 24: Zwei Parametrisierungen derselben Fläche A

13.33 Satz.

Flächenintegrale $\int_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, $\int_A f dS$ sind unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis. Es sei $\psi = \varphi \circ g$ (vgl. Abbildung 24). Es ist

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial s, t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von $\psi = \varphi \circ g$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\varphi \circ g &= \varphi_u \frac{\partial g_1}{\partial s} + \varphi_v \frac{\partial g_2}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi \circ g &= \varphi_u \frac{\partial g_1}{\partial t} + \varphi_v \frac{\partial g_2}{\partial t}.\end{aligned}$$

Damit kann man schreiben

$$\begin{aligned}\int_T \mathbf{F}(\psi(s, t)) \cdot (\psi_s \times \psi_t) d(s, t) &= \int_T \mathbf{F}(\varphi \circ g) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s}\varphi \circ g \times \frac{\partial}{\partial t}\varphi \circ g \right) d(s, t) \\ &= \int_T \mathbf{F}(\varphi \circ g) \cdot \left(\left(\varphi_u \frac{\partial g_1}{\partial s} + \varphi_v \frac{\partial g_2}{\partial s} \right) \times \left(\varphi_u \frac{\partial g_1}{\partial t} + \varphi_v \frac{\partial g_2}{\partial t} \right) \right) d(s, t) \\ &= \int_T \mathbf{F}(\varphi \circ g) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \left(\frac{\partial g_1}{\partial s} \frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_2}{\partial s} \frac{\partial g_1}{\partial t} \right) d(s, t) \\ &= \int_T \mathbf{F}(\varphi \circ g) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \det \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right) d(s, t) \\ &= \int_{g(T)} \mathbf{F}(\varphi) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) d(u, v)\end{aligned}$$

□

Integralsätze von Stokes und Gauß

13.34 Satz. Stokes

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parametrisierung $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi \in C^2(K, \mathbb{R}^3)$. C sei die positiv orientierte Randkurve von A mit Parametrisierung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma$ stetig differenzierbar. Sei F stetig differenzierbares Vektorfeld, $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \iint_A \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_K \operatorname{rot} \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) d(u, v)\end{aligned}$$

Beweis. Sei A eine Fläche, ∂A ihr Rand (der stückweise stetig differenzierbar ist). Wir werden den Integralsatz von Stokes durch Rückführung auf den Satz von Green beweisen. Sei $\gamma(t)$ eine Parametrisierung von $\partial K: \gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Die zugehörige Parametrisierung von ∂A ist dann $[a, b] \rightarrow \varphi \circ \gamma$. Dabei gilt für die Ableitung von $\varphi \circ \gamma$

$$\frac{d}{dt}\varphi \circ \gamma = \varphi_u \dot{\gamma}_1 + \varphi_v \dot{\gamma}_2.$$

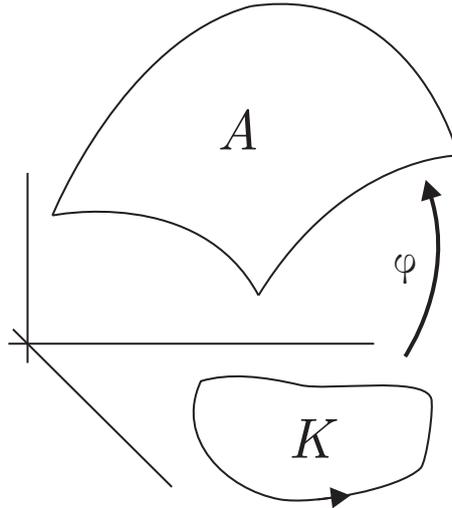


Abbildung 25: Zur Visualisierung des Satzes von Stokes.

Schreibe darum für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi \circ \gamma) \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma) dt \\
 &= \int_a^b \begin{pmatrix} \mathbf{F} \cdot \varphi_u \\ \mathbf{F} \cdot \varphi_v \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma \end{pmatrix} 2dt \\
 &= \int_{\partial K} P dx + Q dy && \text{mit } P = \mathbf{F} \cdot \varphi_u \text{ und } Q = \mathbf{F} \cdot \varphi_v \\
 &= \iint_K \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{F} \cdot \varphi_v - \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{F} \cdot \varphi_u \right)}_{=\Gamma} d(u, v) \\
 &\stackrel{*}{=} \iint_K \text{rot } \mathbf{F} \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) d(u, v) \\
 &= \iint_A \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.
 \end{aligned}$$

Wobei * erst noch gezeigt werden muss. Wir werden den Ausdruck Γ auf diese Form bringen. Betrachte zuerst die Ableitung des Skalarproduktes von \mathbf{F} und der Ableitungen von φ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=1}^3 F^i \varphi_v^i &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} F^i \varphi_u^j \varphi_v^i + F^i \varphi_{vu}^i \right) \\
 \frac{\partial}{\partial v} \sum_{i=1}^3 F^i \varphi_u^i &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} F^i \varphi_v^j \varphi_u^i + F^i \varphi_{uv}^i \right) \\
 \Rightarrow \Gamma &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} F^i \varphi_u^j \varphi_v^i - \frac{\partial}{\partial x_j} F^i \varphi_v^j \varphi_u^i \right).
 \end{aligned}$$

Dies bezeichnet die Rotation des Vektorfeldes \mathbf{F} skalar multipliziert mit $(\varphi_u \times \varphi_v)$, denn es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) &= \begin{pmatrix} \partial_2 F^3 - \partial_3 F^2 \\ \partial_3 F^1 - \partial_1 F^3 \\ \partial_1 F^2 - \partial_2 F^1 \end{pmatrix} \cdot (\varphi_u^2 \varphi_v^3 - \varphi_u^3 \varphi_v^2) \\ &= \partial_2 F^3 \varphi_u^2 \varphi_v^3 - \partial_2 F^3 \varphi_u^3 \varphi_v^2 + \dots \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} F^i \varphi_u^j \varphi_v^i - \frac{\partial}{\partial x_j} F^i \varphi_v^j \varphi_u^i \right). \end{aligned}$$

□

13.35 Satz. Gauß

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parametrisierung $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sei A geschlossene Fläche, V der von A eingeschlossene Bereich, $\partial V = A$. Sei A so parametrisiert, durch φ , dass \mathbf{N} , die Einheitsnormale, nach außen zeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_K \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot \mathbf{N} \|\varphi_u \times \varphi_v\| d(u, v) \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} d(x, y, z) \end{aligned}$$

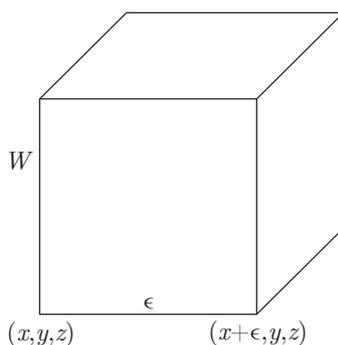


Abbildung 26: Ein infinitesimal kleiner Würfel mit Kantenlänge ϵ

Beweis. Beweise den Satz von Gauß zunächst für einen infinitesimal kleinen Würfel W mit Kantenlänge ϵ (vgl. Abbildung 26). Zeige, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \iint_W \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{F}$$

Betrachte dazu beispielhaft den Anteil der Oberfläche des Würfels, der senkrecht zur z -Achse steht. Das Skalarprodukt mit der Flächennormalen liefert dann die dritte Komponente des Vektorfelds $\mathbf{F} = (F^1, F^2, F^3)$ wobei der Deckel ein positives, der Boden ein negatives Vorzeichen liefert:

$$\int_y^{y+\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} F^3(x, y, z + \epsilon) - F^3(x, y, z) d(x, y) = \epsilon^3 \frac{\partial F^3}{\partial z} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

Für die beiden Flächen senkrecht zur y - sowie zur x -Achse ergibt sich analog $\epsilon^3 \frac{\partial F^2}{\partial y}$ und $\epsilon^3 \frac{\partial F^1}{\partial x}$ und damit insgesamt

$$\iint_W \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon^3 \left(\frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

Denkt man sich nun einen größeren Würfel mit Kantenlänge 1, so kann man sich diesen aus vielen kleinen Würfeln der Kantenlänge ϵ zusammengesetzt vorstellen. Es ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \iint_{W_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{1/\epsilon^3} \iint_W \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{1/\epsilon^3} \epsilon^3 \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} d(x, y, z) \end{aligned}$$

Für Normalbereiche lässt sich der Satz von Gauß auch anders beweisen, sei dazu V Normalbereich, das heißt:

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_1 \varphi_1 \leq z \leq \varphi_2\} \\ &= \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D_2 \psi_1 \leq x \leq \psi_2\} \\ &= \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D_3 \Gamma_1 \leq y \leq \Gamma_2\} \end{aligned}$$

Das Vektorfeld \mathbf{F} sei wie üblich $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Man kann unter Verwendung, dass V Normalbereich ist schreiben

$$\begin{aligned} \iint_D \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} R_z dz d(x, y) &= \iint_D R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y)) d(x, y) \\ &= \iint_A (0, 0, R) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Analog schreibt man für die anderen beiden Komponenten

$$\begin{aligned} \iiint_V Q_y d(x, y, z) &= \iint_A (0, Q, 0) \cdot d\mathbf{S} \\ \iiint_V P_x d(x, y, z) &= \iint_A (P, 0, 0) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} d(x, y, z) = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) d(x, y, z) = \iint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

□

Anwendungen des Satzes von Gauß

Archimedisches Prinzip

Das Archimedische Prinzip besagt, dass ein Körper im Wasser eine Auftriebskraft erfährt, die bestimmt wird durch die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Wassers.

Beweis. Um das mit Hilfe des Satzes von Gauß zu zeigen gehe folgendermaßen vor: Aus der Physik weiß man, dass der Druck mit der Tiefe des Wassers zunimmt:

$$p = -\rho g z \quad z = 0 : \text{Wasseroberfläche.}$$

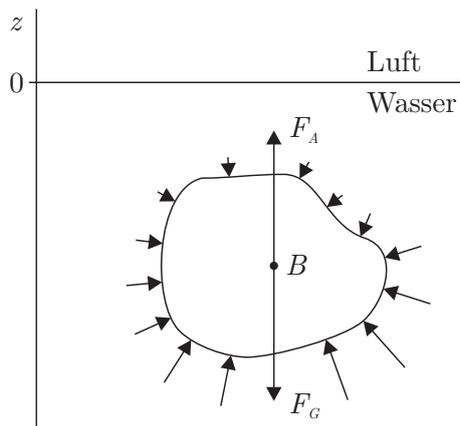


Abbildung 27: Der Druck bewirkt eine Auftriebskraft, da er mit der Tiefe zunimmt

Mit dem Satz von Gauß kann man zeigen, dass für eine skalare Funktion f gilt

$$\int_{\partial B} f d\mathbf{S} = \int_B \nabla f dV,$$

denn schreibt man den Normalenvektor \mathbf{N} auf die folgende Weise

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{e}_i, \quad N_i = \langle \mathbf{N}, \mathbf{e}_i \rangle$$

mit der Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, so kann man für das Oberflächenintegral schreiben

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} f d\mathbf{S} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \int_{\partial B} \langle \mathbf{N}, f \mathbf{e}_i \rangle dS \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \int_B \operatorname{div}(f \mathbf{e}_i) dV \\ &= \int_B \operatorname{grad} f dV \\ &= \int_B \nabla f dV. \end{aligned}$$

Wendet man dies an auf $f = -p$ so erhält man für die Auftriebskraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= - \int_{\partial B} p d\mathbf{S} \\ &= - \int_B \nabla p dV \\ &= \rho g \mathbf{e}_3 \int_B dV \\ &= \rho g \mathbf{e}_3 \operatorname{vol}(B). \end{aligned}$$

□

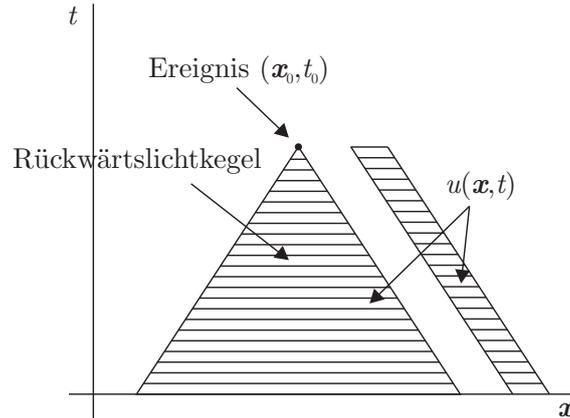


Abbildung 28: Der Teil außerhalb des Rückwärtslichtkegels kann das Ereignis (\mathbf{x}_0, t_0) nicht beeinflussen, da Energie und somit Information nicht schneller als Licht übertragen werden kann.

Kausalitätsprinzip für Lösungen der Wellengleichung

Die allgemeine Wellengleichung lautet

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \Delta_x u$$

mit $u(\mathbf{x}, t)$ 2-mal stetig differenzierbar. In einer Dimension haben allgemeine Lösungen die Form

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Was wir zeigen möchten ist, dass nur der Teil einer Welle $u(\mathbf{x}, t)$, der im Lichtkegel liegt, das Ereignis (\mathbf{x}_0, t_0) beeinflussen kann (vgl. Abbildung 28). Die mathematische Formulierung dafür lautet: Sind u_1, u_2 Lösungen der Wellengleichung und ist für ein $t < t_0$

$$\left. \begin{array}{l} u_1(\mathbf{x}, t) = u_2(\mathbf{x}, t) \\ \dot{u}_1(\mathbf{x}, t) = \dot{u}_2(\mathbf{x}, t) \end{array} \right\} \forall \mathbf{x} \in K_t$$

mit dem Boden des Rückwärtslichtkegels

$$K_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq c(t_0 - t)\},$$

dann gilt

$$u_1(\mathbf{x}_0, t_0) = u_2(\mathbf{x}_0, t_0).$$

Beweis. Die Idee ist, zu zeigen, dass aus dem Rückwärtslichtkegel nur Energie entweichen kann (siehe auch Abbildung 28) d.h., dass innerhalb des Kegels die Energie mit der Zeit höchstens konstant bleiben kann und somit die Energiedichte bei der Spitze ($t = t_0$) verschwinden muss, wenn sie schon am Boden ($t < t_0$) verschwindet.

Schritt 1 (Kontinuitätsgleichung) Sei die Energiedichte definiert durch

$$\epsilon_t(u) := \dot{u}^2 + c^2 \|\nabla_x u\|^2$$

mit dem räumlichen Gradienten

$$\nabla_x u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u, \frac{\partial}{\partial x_2} u, \frac{\partial}{\partial x_3} u \right).$$

Es sei

$$u_t(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}, t).$$

Der Träger einer skalaren Funktion f ist

$$\text{supp}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Existiert zu einer Dichtefunktion ρ und einer Stromdichte \mathbf{j} eine Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

so resultiert die Änderung der in einem Volumen $D \subset \mathbb{R}^3$ enthaltene Größe $Q_D = \int_D \rho dV$ aus dem Strom, der die Oberfläche durchfließt:

$$\frac{d}{dt} Q_D = \int_D \dot{\rho} dV = - \int_{\partial D} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Dies ist eine direkte Konsequenz des Satzes von Gauß und man spricht von der (globalen) Erhaltung der Größe Q . Solange die Stromdichte \mathbf{j} auf ein kompaktes Gebiet $\bar{D} \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt bleibt, d.h. $\text{supp}(\mathbf{j}) \subset \bar{D}$, ist die Größe Q nicht nur global, sondern auch lokal innerhalb des Volumens \bar{D} erhalten:

$$\frac{d}{dt} Q_{\bar{D}} = - \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Dabei wurde verwendet, dass \mathbf{j} da stetig, auf dem Rand von \bar{D} identisch 0 sein muss (wenn \mathbf{j} es außerhalb von D auch ist).

In unserem Fall findet man die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\epsilon}_t + \text{div}_x \mathbf{j}_E = 0$$

für die Energiedichte ϵ_t und die Energiestromdichte $\mathbf{j}_E = -2c^2 \dot{u} \nabla_x u$, denn

$$\begin{aligned} 2c^2 \text{div}_x (\dot{u} \nabla_x u) &= 2c^2 (\langle \nabla_x \dot{u}, \nabla_x u \rangle + \dot{u} \Delta_x u) \\ &= 2c^2 \langle \nabla_x \dot{u}, \nabla_x u \rangle + 2\dot{u} \ddot{u} \\ &= \dot{\epsilon}_t(u). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Wellengleichung verwendet, sowie

$$\|\nabla_x u\|^2 = \langle \nabla_x u, \nabla_x u \rangle.$$

Das obige Argument lässt sich hier also anwenden und es folgt die Erhaltung der Energie $E_t[u] = \int \epsilon_t(u) dV$.

Schritt 2 (Energieerhaltung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ offen mit Rand $\partial\Omega$. Dann ist

$$\int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} -2c^2 \dot{u} \nabla_x u \\ \epsilon_t(u) \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \text{div} \begin{pmatrix} -2c^2 \dot{u} \nabla_x u \\ \epsilon_t(u) \end{pmatrix} dV = 0,$$

denn es ist nach Schritt 1

$$\text{div} \begin{pmatrix} -2c^2 \dot{u} \nabla_x u \\ \epsilon_t(u) \end{pmatrix} = \dot{\epsilon}_t(u) - 2c^2 \text{div}_x (\dot{u} \nabla_x u) = 0.$$

Schritt 3 (Anwendung auf Kegel Teil 1) Sei $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ Dann gilt für die Einheitsnormale

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ N_0 \end{pmatrix}$$

des Rückwärtslichtkegels

$$K := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| \leq c|t - t_0|\}$$

folgende Gleichung

$$N_0^2 = c^2 \|\mathbf{N}_1\|^2.$$

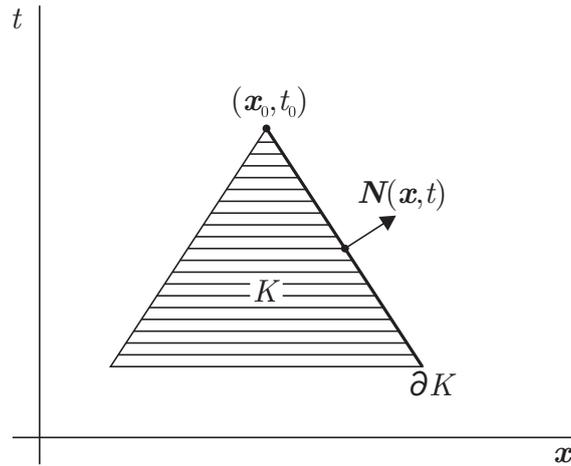


Abbildung 29: Der Normalenvektor steht senkrecht auf dem Rand des Rückwärtslichtkegels

Argumentation: Der Rand von K ist gegeben durch $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| = c|t - t_0|$ und somit Teil der Niveaumenge $h(\mathbf{x}, t) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|^2 - c^2|t - t_0|^2 = 0$, vgl. Abbildung 29. Also ist die Einheitsnormale parallel zum Gradienten dieser Niveaumenge:

$$\mathbf{N} \parallel \nabla h \quad \text{oder} \quad \mathbf{N} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x} \\ c^2|t - t_0| \end{pmatrix}.$$

Also kann man schreiben

$$\begin{aligned} c^2 \|\mathbf{N}_1\|^2 &= \lambda^2 c^2 \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|^2 \\ &= \lambda^2 c^4 |t - t_0|^2 \\ &= N_0^2. \end{aligned}$$

Schritt 4 (Anwendung auf Kegel Teil 2) Sei $t < t_0$ und der Rückwärtslichtkegel wie vorhin

$$K_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq c|t - t_0|\}.$$

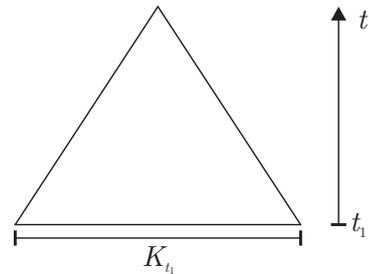


Abbildung 30

Für $t_1 < t_2 < t$ gilt dann

$$\int_{K_{t_2} \times \{t_2\}} \epsilon_t(u) dV - \int_{K_{t_1} \times \{t_1\}} \epsilon_t(u) dV \leq 0.$$

Denn: Wendet man Schritt 2 an auf

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, t) \in K \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$$

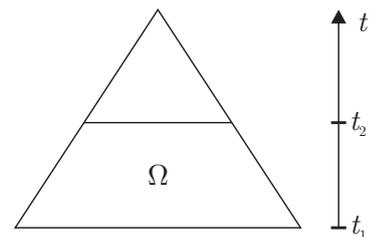


Abbildung 31

erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} -2c^2\dot{u}\nabla_x u \\ \epsilon_t(u) \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{K_{t_2} \times \{t_2\}} \epsilon_t(u) dV - \int_{K_{t_1} \times \{t_1\}} \epsilon_t(u) dV + \int_M \left\langle \begin{pmatrix} -2c^2\dot{u}\nabla_x u \\ \epsilon_t(u) \end{pmatrix}, \mathbf{N} \right\rangle dS
\end{aligned}$$

mit der Mantelfläche M von Ω sowie der Tatsache, dass auf dem Deckel von Ω die Einheitsnormale gegeben ist durch $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$ beziehungsweise auf dem Boden von Ω durch $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{pmatrix}$. Man muss nun noch zeigen, dass das hintere Integral größer oder gleich Null ist:

$$\begin{aligned}
\int_M \left\langle \begin{pmatrix} -2c^2\dot{u}\nabla_x u \\ \epsilon_t(u) \end{pmatrix}, \mathbf{N} \right\rangle dS &= \int_M -\langle 2c^2\dot{u}\nabla_x u, \mathbf{N}_1 \rangle + N_0 \epsilon_t(u) dV \\
&\geq \int_M N_0 (-2c\dot{u}\|\nabla_x u\| + \dot{u}^2 + c^2\|\nabla_x u\|^2) dS \\
&= \int_M N_0 (c\|\nabla_x u\| - \dot{u}^2)^2 dS \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Denn es gilt nach Schritt 3:

$$-\langle 2c^2\dot{u}\nabla_x u, \mathbf{N}_1 \rangle \geq -\|\nabla_x u\| \|\mathbf{N}_1\| 2c^2\dot{u} = -\|\nabla_x u\| N_0 2c\dot{u}.$$

Schritt 5 (Energieabnahme im Rückwärtslichtkegel) Falls für ein $t < t_0$ gilt, dass

$$\left. \begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \dot{u}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in K_t,$$

so gilt $u(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$. Denn nach Schritt 4 ist

$$0 = \int_{K_t \times \{t\}} \epsilon_t(u) dV \geq \int_{K_{t_1} \times \{t_1\}} \epsilon_t(u) dV \geq 0$$

da die Energiedichte $\epsilon_t(u)$ positiv ist. Es folgt

$$\Rightarrow \int_{K_{t_1} \times \{t_1\}} \epsilon_t(u) dV = 0.$$

Damit ist $\epsilon_t(u) \equiv 0$ auf $K_{t_1} \times \{t_1\}$ und auch $\epsilon_t(u) \equiv 0$ auf \mathring{K} (Inneres von K).

$$\Rightarrow u \equiv 0 \text{ auf } \mathring{K}.$$

Da u stetig ist

$$\Rightarrow u \equiv 0 \text{ auf } K \text{ insbesondere auch für } (\mathbf{x}_0, t_0).$$

Schritt 6 (Superposition) Wenn gilt, dass

$$\left. \begin{aligned} u_1(\mathbf{x}, t) &\equiv u_2(\mathbf{x}, t) \\ \dot{u}_1(\mathbf{x}, t) &\equiv \dot{u}_2(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \right\} \text{ auf } K_t \times \{t\},$$

dann gilt

$$u_1(\mathbf{x}_0, t_0) = u_2(\mathbf{x}_0, t_0).$$

Argumentation: Eine Superposition $u := u_1 - u_2$ der beiden Lösungen ist wieder eine Lösung der Wellengleichung und erfüllt die Voraussetzungen von Schritt 5 und es gilt

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0, t_0) &= u_1(\mathbf{x}_0, t_0) - u_2(\mathbf{x}_0, t_0) = 0 \\ \Rightarrow u_1(\mathbf{x}_0, t_0) &= u_2(\mathbf{x}_0, t_0). \end{aligned}$$

□

Transporttheorem (Fluiddynamik)

Die Stromlinien sind durch $\Phi^t(\mathbf{x})$ gegeben wobei $\Phi^t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus ist. Das zugehörige Geschwindigkeitsvektorfeld ist $\mathbf{v}(\Phi^t(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi^t(\mathbf{x})$. Das Transporttheorem ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi^t(B)} f(\mathbf{y}, t) dV = \int_{\Phi^t(B)} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{y}, t) dV + \int_{\partial \Phi^t(B)} f(\mathbf{y}, t) \mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Die Funktion f kann dabei beispielsweise eine Massendichte oder Energiedichte oder einfach $f \equiv 1$ sein.

Beweis. Lemma: Aus der Linearen Algebra weiß man, dass gilt

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \text{tr}(\dot{A}(t)A^{-1}(t)) \det(A(t)).$$

Auf den Beweis dafür wird hier verzichtet. Man kann also schreiben

$$\begin{aligned} \partial_t |\det(D\Phi^t)| &= \text{sgn}(\det(D\Phi^t)) \text{tr}(\partial_t D\Phi^t (D\Phi^t)^{-1}) \det(D\Phi^t) \\ &= |\det(D\Phi^t)| \text{tr}(D\dot{\Phi}^t D(\Phi^{-t}) \circ \Phi^t) \\ &= |\det(D\Phi^t)| \text{tr}(D(\dot{\Phi}^t \circ \Phi^{-t}) \circ \Phi^t) \\ &= |\det(D\Phi^t)| \text{div}(\dot{\Phi}^t \circ \Phi^{-t}) \circ \Phi^t. \end{aligned}$$

Schreibe also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi^t(B)} f(\mathbf{x}, t) dV &= \frac{d}{dt} \int_B f(\Phi^t(\mathbf{x}), t) |\det(D\Phi^t)| dV \\ &= \int_B \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\Phi^t(\mathbf{x}), t) + \langle \nabla_x f \circ \Phi^t, \dot{\Phi}^t \rangle + f(\Phi^t(\mathbf{x}), t) \text{div}(\dot{\Phi}^t \circ \Phi^{-t}) \circ \Phi^t \right] |\det(D\Phi^t)| dV \\ &= \int_{\Phi^t(B)} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{y}, t) + \langle \nabla_x f, \dot{\Phi}^t \circ \Phi^{-t} \rangle + f(\mathbf{y}, t) \text{div}(\dot{\Phi}^t \circ \Phi^{-t}) \right] dV \\ &= \int_{\Phi^t(B)} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{y}, t) + \text{div}(f(\mathbf{y}, t) \dot{\Phi}^t \circ \Phi^{-t}) \right] dV \\ &= \int_{\Phi^t(B)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{y}, t) dV + \int_{\partial \Phi^t(B)} f(\mathbf{y}, t) \dot{\Phi}^t \circ \Phi^{-t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\Phi^t(B)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{y}, t) dV + \int_{\partial \Phi^t(B)} f(\mathbf{y}, t) \mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

□

Zur Anwendung: Man beobachtet bei verschiedenen Körpern den selben Zusammenhang zwischen Volumen und Oberfläche

	Volumen		Oberfläche
Kugel	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{\partial r}{\partial t}$	$4\pi r^2$
Torus	$2\pi^2 r^2 R$	$\frac{\partial r}{\partial t}$	$4\pi r^2 R$
Kreisfläche	πr^2	$\frac{\partial r}{\partial t}$	$2\pi r$

Die Frage ist: wann funktioniert das? Die Antwort liefert das Transporttheorem mit $f \equiv 1$, es funktioniert wenn ein Referenzkörper $B \subset \mathbb{R}^n$ und wie oben ein Diffeomorphismus Φ^t existiert, so dass

der zu untersuchende Körper gerade $\Phi^r(B)$ ist und das zugehörige Skalarprodukt $\langle \mathbf{v}(\mathbf{y}), \mathbf{N}(\mathbf{y}) \rangle \equiv 1$ auf $\partial\Phi^r(B)$. Denn dann ist

$$\int_{\partial\Phi^r(B)} f(\mathbf{y}, t) \mathbf{v}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Phi^r(B)} dS = \text{area}(\partial\Phi^r(B)).$$

Zum Beispiel ist dies gegeben für eine Kugel mit Radius 1 um den Ursprung: $B = B_1(0)$. Der Fluss ist $\Phi^r(\mathbf{x}) = r\mathbf{x} = \mathbf{y}$ und damit das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Es zeigt immer in die selbe Richtung wie der Normalenvektor auf der Kugeloberfläche, also ist das Skalarprodukt $\langle \mathbf{v}(\mathbf{y}), \mathbf{N}(\mathbf{y}) \rangle \equiv 1$ und damit

$$\frac{d}{dr} \int_{\Phi^r(B)} f(\mathbf{y}, t) dV = \frac{d}{dr} \text{vol}(\Phi^r(B)) = \int_{\partial\Phi^r(B)} \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Phi^r(B)} dS = \text{area}(\partial\Phi^r(B)).$$