Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 11/12

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 4 (Abgabe am 7.11.2011)

Aufgabe 17 (5 Punkte)

Bei einer Tierpopulation verhalte sich die Geburtenrate g (Anzahl Geburten pro Jahr pro Populationsgröße) in Abhängigkeit von der Populationsdichte d (Anzahl Individuen pro Fläche) gemäß $g = 0{,}5 + 0{,}3d$, die Sterberate s gemäß $s = 0{,}3 + 0{,}7d$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch: Für welche d schrumpft die Population, für welche wächst sie, für welche bleibt sie konstant?

Aufgabe 18 (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel, zweier Zahlen $\alpha, \beta > 0$:

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \, .$$

Hinweise: Es gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq y$. Denken Sie auch an die binomischen Formeln.

Aufgabe 19 (3+3+3 = 9 Punkte)

Wenn sich etwa 10^8 *E. coli*-Bakterien in der Niere eines Menschen befinden, können Sie eine Nierenbeckenentzündung auslösen. Zur Zeit $t = 0$ seien 50 000 *E. coli*-Bakterien in eine Niere gelangt. Hier vermehren sie sich so schnell, dass sich ihre Anzahl alle 20 Minuten verdoppelt (Absterbe- oder Ausscheidungsprozesse seinen bereits eingeschlossen). Sei t die Zeit (in Stunden gemessen) und $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit t.

a) Welchen Wert hat $\dfrac{N(t+1)}{N(t)}$, d.h. um welchen Faktor wächst die Anzahl innerhalb einer Stunde?

b) Geben Sie $N(t)$ als Funktion der Form $N(t) = C \cdot \alpha^t$ an.

c) Können die Bakterien bereits nach 3 Stunden eine Nierenbeckenentzündung auslösen? Wie sieht es nach 4 Stunden aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 20 (2+3+3+2 = 10 Punkte)

In einem See nimmt die Licht-Intensität pro 1m Wassertiefe um 8% ab. Sei $I(x)$ die Intensität in x Metern Tiefe.

a) Was bedeutet $I(0)$ in Worten?

b) Geben Sie eine Formel für $I(x)$ an. Diese darf den nicht weiter spezifizierten Wert $I(0)$ enthalten.

c) Zeichnen Sie die Funktion $\frac{I(x)}{I(0)}$ für $x \in [0, 12]$ (von Hand oder mit Matlab).

d) In welcher Tiefe sind noch ungefähr 50% der Ausgangsintensität übrig?
Lesen Sie den gesuchten Wert z.B. aus Ihrem Diagramm aus Teil (b) ab.

Aufgabe 21 [2] (10 Punkte)

Plotten Sie die Funktionen $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, 2, 4$ in dasselbe Diagramm mit $x \in [0, 1.2]$. Verweden Sie dabei für die Funktionen mit $\alpha < 1$ gestrichelte Linien und für die mit $\alpha \geq 1$ durchgezogene.

Beispiel 5: Für einen Datenvektor `x` zeichnet

```
» plot(x,sin(x),'-')
» hold on
» plot(x,cos(x),'--')
» hold off
```

$\sin x$ und $\cos x$ in dasselbe Diagramm.

Aufgabe 22 (2+2+5+4 = 13 Punkte)

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte (x, y) in der Ebene, die von einem gegebenen Punkt (u, v) den gleichen Abstand r haben. Die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4\} \tag{$*$}$$

beschreibt also eine Kreislinie und

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-2)^2 + (y+1)^2 < 4\}$$

das Innere dieses Kreises.

a) Was ist der Mittelpunkt des Kreises?
b) Was ist sein Radius?

Hinweis: Denken Sie an die Definition des euklidischen Abstands aus Vorlesung 2.

Wenn wir Gleichung $(*)$ nach y auflösen, erhalten wir zwei Lösungen. Diese stellen Funktionen $f_{1,2}(x)$ dar, deren Graphen gemeinsam die Kreislinie bilden.

c) Was ist der Definitionsbereich der beiden Funktionen?
Hinweis: Unter der Wurzel sollten keine negativen Zahlen auftreten.
d) Zeichnen Sie nun den Kreis $(*)$ mit Matlab.
Hinweis: Denken Sie an den Befehle `hold on` und `hold off` aus Beispiel 5.

[2] Kennzeichnen Sie bitte ab sofort alle Ihre Matlab-Abgaben `computergeschrieben` mit Ihrem Namen!

(Notwendige Punktzahl: 14 von 57)