

Mathematik I

für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 7 (Abgabe am 28.11.2011)

Aufgabe 33

(1+1+2+3 = 6 Punkte)

Beim Rechnen mit Matrizen gelten etwas andere Regeln als beim Rechnen mit Zahlen. Zeigen Sie (durch ausrechnen) für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dass}$$

- a) $A^2 = 0$ (obwohl $A \neq 0$),
- b) $B^2 = -I$ (obwohl die Gleichung $x^2 = -1$ für $x \in \mathbb{R}$ keine Lösung hat),
- c) $AB \neq BA$ und
- d) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

Aufgabe 34

(8 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) AA^T , b) $A^T A$, c) $AA^T B$, d) $A^T AB$,
- e) $B^T A^T A$, f) $B^T A^T AB$ g) A^2 , h) $AA^T AA^T$.

HINWEIS: Das Assoziativgesetz ist hilfreich.

Aufgabe 35

(4+4+2 = 10 Punkte)

Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) A^{2n} für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. alle gerade Potenzen $A^0 = I, A^2, A^4, \dots$),
- b) A^{2n+1} für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. alle ungeraden Potenzen $A^1 = A, A^3, A^5, \dots$),
- c) $A^9 - 2A^8 + 3A^7 - 3A^6 + 4A^5 - 5A^4$.

Aufgabe 36

(8 Punkte)

Berechnen Sie – nun mithilfe von MATLAB⁶ – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) $2A + B$, b) $(3A)^T - (2B)^T$, c) AB , d) BA ,
- e) $A^T B^T$, f) $(BA)^T$, g) $BA^2 BA^3 B$, h) $A^5 B^3$.

⁶Hinweise siehe Zusatzblatt.

Aufgabe 37

(7+5+3+5 = 20 Punkte)

Wir betrachten weibliche Königslachse (*Oncorhynchus tshawytscha*) in amerikanischen Gewässern. Die Tiere schlüpfen in einem oberen Flusslauf und wandern den Fluss hinab ins Meer. Bei Einsetzen der Geschlechtsreife begeben sie sich zurück zum Ursprungsort (Laichwanderung), laichen und sterben. Wir modellieren eine Population 0- bis 4-jähriger weiblicher Lachse. Sei

- $1 - s_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, der Anteil der Lachse, der im j -ten Lebensjahr stirbt (ohne Berücksichtigung der Laichwanderung),
- b_j , $j = 2, 3, 4$, der Anteil derjenigen Lachse, der sich am Ende des j -ten Lebensjahrs auf Laichwanderung begibt ($b_4 = 1$),
- μ der Anteil der Tiere, der die Laichwanderung überlebt und
- m_j , $j = 2, 3, 4$, die Anzahl der gelegten Eier (Rogen) eines weiblichen Lachses, der sich im j -ten Lebensjahr auf Laichwanderung begibt und diese überlebt.

Aus $\sigma = 1,1\%$ der Eier entwickeln sich dann wieder neue weibliche Lachse. Damit erhalten wir die Leslie-Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma m_2 \mu b_2 & \square & \square \\ \square & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \\ \square & 0 & 0 & (1 - b_3) s_4 & \square \end{pmatrix}.$$

- a) Geben Sie die vollständige Leslie-Matrix an, d.h. ergänzen Sie die fehlenden Einträge.

Wir arbeiten mit den folgenden Zahlenwerten⁷

```
>> s = [.013 .8 .8 .8];
>> b = [0 .013 .159 1];
>> m = [0 3257 4095 5149];
>> mu = .7; sigma = .011;
```

und beginnen die Definition der Leslie-Matrix:

```
>> L = zeros(5,5);
>> L(1,3) = sigma*m(2)*mu*b(2); % Lassen Sie die Strichpunkte weg,
>> L(3,2) = s(2); % wenn Sie sehen möchten,
>> L(5,4) = (1-b(3))*s(4); % was passiert.
```

- b) Ordnen Sie mit MATLAB allen weiteren nicht-verschwindenden Elementen der Leslie-Matrix ihren richtigen Wert zu.

Wir beginnen mit N_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4$, j -jährigen weiblichen Lachsen. Wählen Sie für N_j die $(j+1)$ -te Ziffer Ihrer Matrikelnummer (ersetzen Sie Nullen durch Einsen), multipliziert mit Tausend.

- c) Berechnen Sie mit MATLAB, wie sich Ihre Lachspopulation in den nächsten 50 Jahren entwickelt.
- d) Beschreiben Sie diese Entwicklung in wenigen Sätzen, und belegen Sie Ihre Aussagen durch geeignete Diagramme.

⁷Quelle: P. Kareiva, M. Marvier und M. McClure, *Recovery and Management Options for Spring/Summer Chinook Salmon in the Columbia River Basin*, Science **290** (2000) 977–979, doi:10.1126/science.290.5493.977