Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 11/12

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 9 (Abgabe am 12.12.2011)

Aufgabe 42 (4+6+2 = 12 Punkte)

a) In Aufgabe 16 haben Sie die ersten Fibonacci-Zahlen F_t berechnet. Plotten Sie nun mit MATLAB die Verhältnisse $v_t := F_{t+1}/F_t$ für $t = 1, \dots, 1000$.

b) In Teil a) haben wir mithilfe von MATLAB beobachtet, dass das Verhältnis F_n/F_{n-1} zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen offensichtlich einem Grenzwert zustrebt. Wir nehmen nun an, dass dieser Grenzwert existiert und nennen ihn α, d.h.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} .$$

Bestimmen Sie α wie folgt:

- Dividieren Sie die Rekursionsvorschrift $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ durch F_{n-1}.
- Bilden Sie den Limes $n \to \infty$, um eine Gleichung für α zu erhalten.
- Lösen Sie diese (quadratische) Gleichung für α.
- Welche der beiden Lösungen ist die richtige und warum?

c) Zeichnen Sie mit MATLAB in das Diagramm aus Teil a) nun zum Vergleich die waagerechte Gerade $y = \alpha$ ein.

Aufgabe 43 (3+3+3+3+3+3+3 = 21 Punkte)

Entscheiden Sie mit Hilfe der Sätze und Beispiele aus der Vorlesung, ob die folgenden Zahlenfolgen konvergieren, und bestimmen Sie ggf. ihre Grenzwerte für $n \to \infty$.

a) $\dfrac{3n}{n+1}$ b) $\dfrac{n(-1)^n}{n+1}$ c) $\dfrac{n}{n+(-1)^n}$ d) $\dfrac{n^2}{2n-7n^2}$

e) $\dfrac{n+n^3}{11-n^2}$ f) $\sin\left(\dfrac{1+n\pi}{2n}\right)$ g) $\dfrac{\tan(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

Aufgabe 44 (4+6+2 = 12 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichen Sie (mit MATLAB oder von Hand) die Graphen von f_1, f_2, f_4 und f_8 für $|x| \le 1{,}1$.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für} \qquad x = 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie damit für $|x| \le 1$ die Grenzfunktion $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

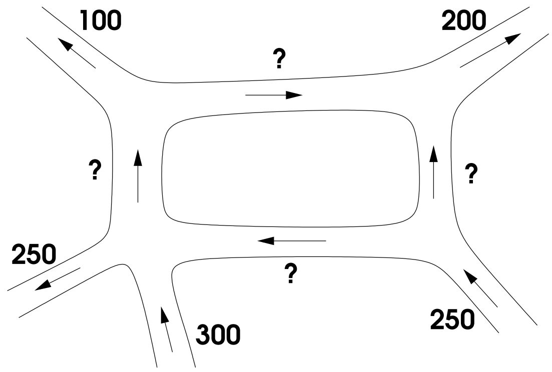
c) Für welche x ist $f(x)$ stetig?

Aufgabe 45 (6+4 = 10 Punkte)
Der antike Philosoph Zenon von Elea (490–430 v. Chr.) glaubte die Widersprüchlichkeit der Zeit so beweisen zu können: Achilles (bekannt für seine Schnelligkeit) tritt ein Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Die Schildkröte läuft hundertmal langsamer als Achilles, erhält allerdings 10 Meter Vorsprung. Hat Achilles die ersten 10 Meter überwunden, so ist die Schildkröte bereits 10 cm weiter. Hat Achilles auch diese 10 cm zurückgelegt, so ist die Schildkröte doch schon 1 mm weiter und so fort. So kann Achilles die Schildkröte nie einholen.

Womit Zenon nicht rechnete ist, dass eine unendliche Reihe konvergent sein (und damit einen endlichen Wert haben) kann. Bestimmen Sie die Position x_0 der Rennbahn, an der Achilles die Schildkröte überholt, auf zweierlei Weise,

a) einmal mit Hilfe der geometrischen Reihe, und
b) ein zweites Mal, indem Sie Gleichungen für die Position $x_A(t)$ des Achilles und die Position $x_S(t)$ der Schildkröte als Funktion der Zeit aufstellen und den Schnittpunkt aus der Gleichung $x_A(t) = x_S(t)$ ermitteln.

Aufgabe 46 (14 Punkte)
Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahl Autos sagen, die die vier mit Fragenzeichen markierten Staßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf (4 Punkte) , bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an (6 Punkte). Geben Sie außerdem für jede, der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an (4 Punkte).