

Mathematik I

für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 11 (Abgabe am 09.01.2012)

Aufgabe 52

(3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)

Bestimmen Sie (für $a \in \mathbb{R}$):

a) $\int_1^3 \frac{1-x^3}{x^3} dx$

b) $\int_{-1}^1 (1-x)^2 dx$

c) $\int_0^1 e^{-ax} dx$

d) $\int_e^{e^2} \log x dx$

e) $\int_0^1 7^x dx$

f) $\int_0^1 xe^x dx$

Aufgabe 53

(6+6 = 12 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

HINWEIS: Verwenden Sie das Additionstheorem des Sinus, um den Integranden durch $\sin(2nx)$ auszudrücken.

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq m.$

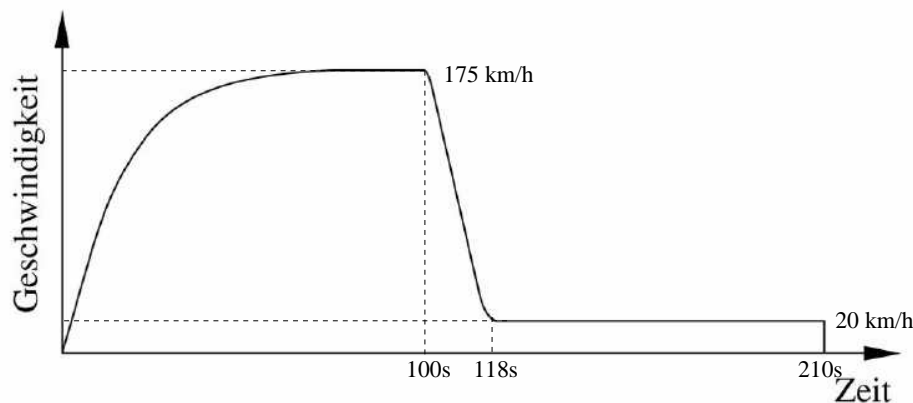
HINWEIS: Integrieren Sie zweimal partiell.

Aufgabe 54

(4+4+4 = 12 Punkte)

In der Vorlesung haben wir uns überlegt, dass der untenstehende Graph den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf bei einem Fallschirmsprung beschreibt.

- Welche Größe wird durch die Fläche zwischen dem Graph und der Zeitachse beschrieben?
- Zeichnen Sie ein, wie der Graph verläuft, wenn sich der Fallschirm nicht öffnet.
- Zu welchem Zeitpunkt erreicht der Fallschirmspringer in diesem Fall den Boden?



Aufgabe 55

(10 Punkte)

Eine Wasserquelle versiegt allmählich. Der Wasseraustritt geht innerhalb von 3 Wochen von $50 \ell/\text{min}$ auf $1 \ell/\text{min}$ zurück. Wieviel Wasser ist in dieser Zeit ausgetreten, wenn wir annehmen, dass der Wasseraustritt pro Zeiteinheit als Funktion der Zeit exponentiell abnimmt?

Aufgabe 56

(2+2+2+2+2+4+3 = 17 Punkte)

Wir bestimmen die Fourier-Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & , \quad -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & , \quad |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} , \text{ periodisch fortgesetzt.}$$

a) Zeichnen Sie den Graph von f auf $[-\pi, \pi]$ (von Hand oder mit MATLAB).

```
x1=-pi:.01:-pi/2; x2=-pi/2:.01:pi/2; x3=pi/2:.01:pi;
plot(x1,-pi-x1); hold on; plot(x2,x2); plot(x3,pi-x3); hold off
```

b) Begründen Sie, dass $a_0 = 0$.

c) Begründen Sie, dass $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

d) Begründen Sie, dass $b_{2n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Begründen Sie, dass

$$b_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 .$$

f) Berechnen Sie die b_{2n+1} .

g) Zeichnen Sie die Funktionen

$$S_N := \sum_{n=0}^N b_{2n+1} \sin((2n+1)x), \quad N = 0, 1, 2,$$

in den Plot aus Teil a ein.

HINWEIS: Für die Aufgabenteile b - e müssen Sie nichts rechnen.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

(Notwendige Punktzahl: 13 von 69)