Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 11/12

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Klausur am 7.2.2012

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 88 Punkte erreichbar, 70 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 35 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+2+6+6 = 16 Punkte)
Ein Schwimmer befindet sich am Südufer eines 10 m breiten Flusses. Der Fluss fließt mit einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ m/s nach Westen. Gegenüber dem umgebenden Wasser bewegt sich der Schwimmer mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ den Geschwindigkeitsvektor des Schwimmers gegenüber dem Ufer, mit $\vec{u}$ seinen Geschwindigkeitsvektor gegenüber dem umgebenden Wasser und mit $\vec{s}$ den Vektor der Fließgeschwindigkeit des Flusses (alles in m/s).

a) Geben Sie $\vec{s}$ an.
b) Geben Sie $|\vec{u}|$ an.
c) Bei seinem ersten Versuch durchquert der Schwimmer den Fluss so, dass er sich gegenüber dem Wasser stets genau nach Norden bewegt.
   (i) Geben Sie $\vec{u}$ und $\vec{v}$ an.
   (ii) Wieviel Zeit benötigt er für die Durchquerung?
   (iii) Wie weit wird der Schwimmer abgetrieben, d.h. wieviel Meter weiter westlich gelangt er ans Nordufer?
d) Bei einem zweiten Versuch durchquert der Schwimmer den Fluss auf dem kürzesten Weg von Süd nach Nord.
   (i) Geben Sie $\vec{v}/|\vec{v}|$ an.
   (ii) Bestimmen Sie $|\vec{v}|$.
   (iii) Wieviel Zeit benötigt er diesmal für die Durchquerung?

Aufgabe 2 (6+4+4 = 14 Punkte)

Gnurpen ernähren sich von Xark und Yrb. Eine Gnurpe kann pro Mahlzeit bis zu 500 g Nahrung aufnehmen. Dabei muss sie beachten, dass sie

- mindestens 80 g Brax und
- höchstens 12 mg Dalix

zu sich nimmt.

- 100 g Xark enthalten 15 g Brax und 1 mg Dalix.
- 100 g Yrb enthalten 20 g Brax und 4 mg Dalix.

Bezeichnen Sie mit x die Xarkmenge in 100 g-Einheiten (d.h. $x = 2{,}5$ entspricht 250 g Xark) und mit y die Yrbmenge, ebenfalls in 100 g-Einheiten.

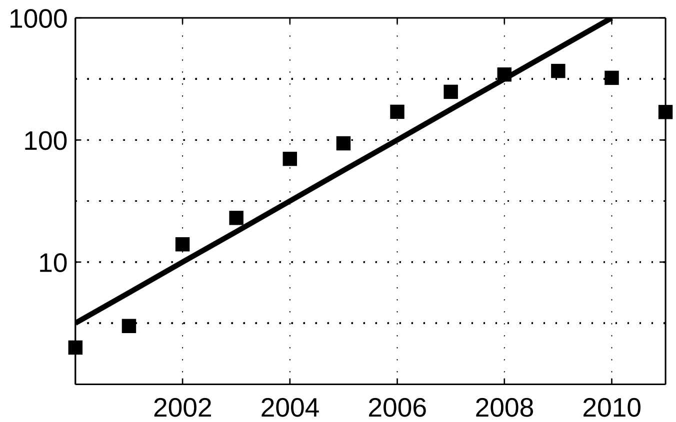
a) Drücken Sie die drei Bedingungen, die eine Gnurpen-Mahlzeit erfüllen muss, jeweils als Ungleichungen in x und y aus.

b) Kennzeichnen Sie in einem xy-Diagramm ($0 \leq x, y \leq 5$) den Bereich, in dem alle drei Bedingungen erfüllt sind.

c) Wie muss eine Mahlzeit zusammengestellt sein, damit sie allen drei Bedingungen genügt und die Yrbmenge maximiert wird?

   HINWEIS: Identifizieren Sie den entsprechenden Punkt in Ihrem Diagramm und berechnen Sie seine Koordinaten.

Aufgabe 3 (10 Punkte)



In Florida als Haustiere gehaltene Tigerpythons entwischen gelegentlich in die Everglades (oder werden dort ausgesetzt). Die dort eigentlich nicht heimischen Schlangen vermehren sich in den tropischen Sümpfen explosionsartig. Als Indikator für die schnelle Zunahme betrachten wir die Anzahl der dort pro Jahr gefangenen Tiere, im nebenstehenden Diagramm dargestellt für die Jahre 2000 bis 2011 (Quelle: `www.nps.gov/ever/naturescience/burmesepython.htm`). Für den Zeitraum bis 2009 vermuten wir exponentielles Wachstum, für den leichten Rückgang danach werden harte Winter verantwortlich gemacht.

Wir beschreiben die Wachstumsphase durch die im Diagramm eingezeichnete Gerade. Bezeichnen Sie mit

- t das t-te Jahr nach 2000 (d.h. das Jahr 2007 entspricht $t = 7$) und mit
- P die Anzahl der pro Jahr gefangenen Pythons.

Geben Sie die Funktion $P(t)$ an, die der eingezeichneten Geraden entspricht. Lesen Sie dazu zwei Punkte auf der Geraden ab, und beachten Sie die logarithmische Einteilung der P-Achse.

Aufgabe 4 (8+2+2+2 = 14 Punkte)

Die Fische einer bestimmten Art werden bis zu 4 Jahre alt. Wir betrachten eine Population dieser Fische, die momentan (Zeit $t = 0$) aus

- $x_1^{(0)} = 60\,000$ Neugeborenen,
- $x_2^{(0)} = 160$ einjährigen,
- $x_3^{(0)} = 30$ zweijährigen und
- $x_4^{(0)} = 3$ dreijährigen Fischen besteht.

Dabei seien in allen Altersklassen nur die weiblichen Fische gezählt.

2% der Neugeborenen überleben das erste Jahr (und sind dann im nächsten Jahr einjährig, d.h. $x_2^{(t+1)} = 0{,}02 \cdot x_1^{(t)}$). Entsprechend sei die Überlebensrate der einjährigen Fische 25% und die der zweijährigen 5%. Jedes zweijährige Weibchen lege Eier, die im folgenden Jahr zu 1000 weiblichen Neugeborenen führen. Analog produziere jedes dreijährige Weibchen 400 weibliche Nachkommen, d.h. $x_1^{(t+1)} = 1000 \cdot x_3^{(t)} + 400 \cdot x_4^{(t)}$.

Wir beschreiben die Population zur Zeit t durch den Populationsvektor

$$\vec{x}^{(t)} = \begin{pmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \\ x_4^{(t)} \end{pmatrix} \quad \text{und erhalten damit das Populationsmodell} \quad \vec{x}^{(t+1)} = L\vec{x}^{(t)}\,.$$

a) Geben Sie die Leslie-Matrix L an.

Die Leslie-Matrix sei in MATLAB als `L` eingegeben. Sie führen folgende Befehle aus:

```
>> x=[60000; 160; 30; 3];
>> L*x

ans =

   1.0e+04 *

    3.1200
    0.1200
    0.0040
    0.0001

>> L\x

ans =

        8000
         120
          60
           0
```

```
>> L*5*x

ans =

   1.0e+05 *

    1.5600
    0.0600
    0.0020
    0.0001

>> L^(-1)*x

ans =

        8000
         120
          60
           0
```

```
>> L^5*x

ans =

   1.0e+05 *

    2.0612
    0.0324
    0.0150
    0.0001

>> L.^5*x

ans =

   1.0e+16 *

    3.0031
    0.0000
    0.0000
    0.0000
```

b) Wieviele zweijährige weibliche Fische gibt es in einem Jahr (zur Zeit $t = 1$)?

c) Wieviele einjährige weibliche Fische gibt es in 5 Jahren?

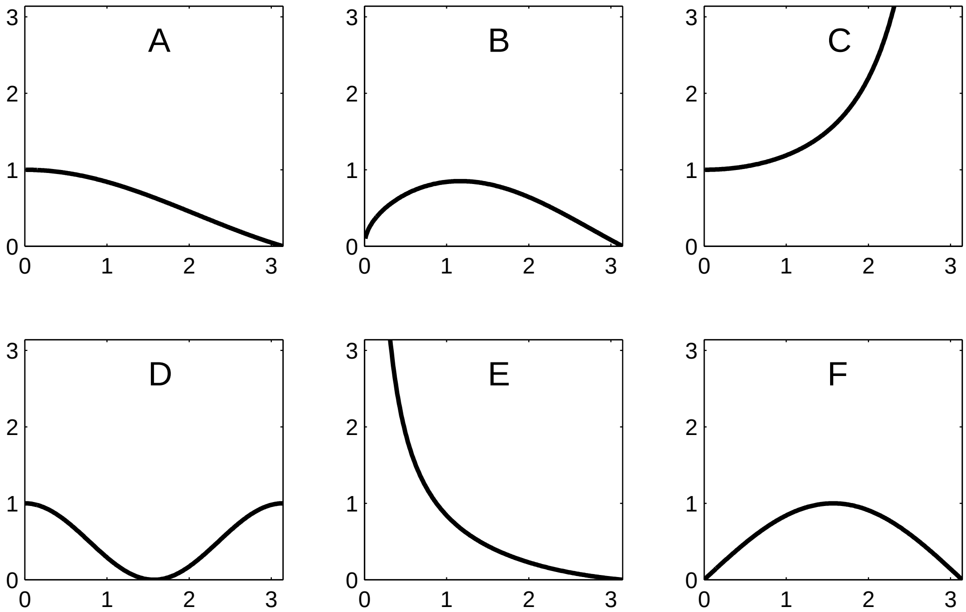
d) Wieviele zweijährige weibliche Fische gab es vor einem Jahr?

Aufgabe 5 (18 Punkte)
Ordnen Sie den folgenden Funktionen jeweils einen der untenstehenden Plots zu (d.h. notieren Sie passende Paare von Klein- und Großbuchstaben).

Für jede richtige Zuordnung erhalten sie 3 Punkte, für jede falsche Zuordnung werden 3 Punkte abgezogen (nicht beantwortete Teilaufgaben geben Null Punkte). Sollte sich auf diese Weise eine negative Punktzahl ergeben, so wird die Aufgabe mit Null Punkten gewertet.

HINWEIS: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

a) $\sin x$ b) $\dfrac{\sin x}{x}$ c) $\dfrac{\sin x}{x^2}$ d) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ e) $\dfrac{x}{\sin x}$ f) $\cos^2(x)$



Aufgabe 6 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Berechnen Sie:

a) $f'(x)$ für $f(x) = \log(\log x)$ b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+x}{x^3}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\log x\,\mathrm{d}x$

HINWEIS: Integrieren Sie bei (d) partiell; leiten Sie dabei den Logarithmus ab.