Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 11/12

# Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Nachklausur am 10.4.2012

---

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 86 Punkte erreichbar, 68 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 34 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

---

**Aufgabe 1** (2+2+6+6 = 16 Punkte)

Eine Ente befindet sich am südwestlichen Ufer eines 10 m breiten Flusses. Der Fluss fließt mit einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ m/s nach Nordwesten. Gegenüber dem umgebenden Wasser bewegt sich die Ente mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen $x_1$-Achse nach Osten und dessen $x_2$-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ den Geschwindigkeitsvektor der Ente gegenüber dem Ufer, mit $\vec{u}$ ihren Geschwindigkeitsvektor gegenüber dem umgebenden Wasser und mit $\vec{s}$ den Vektor der Fließgeschwindigkeit des Flusses (alles in m/s).

a) Geben Sie $\vec{s}$ an.
b) Geben Sie $|\vec{u}|$ an.
c) Bei ihrem ersten Versuch durchquert die Ente den Fluss so, dass sie sich gegenüber dem Wasser stets genau nach Nordosten bewegt.
   (i) Geben Sie $\vec{u}$ und $\vec{v}$ an.
   (ii) Wieviel Zeit benötigt sie für die Durchquerung?
   (iii) Wie weit wird die Ente abgetrieben, d.h. wieviele Meter weiter nordwestlich gelangt sie ans andere Ufer?
d) Bei einem zweiten Versuch durchquert die Ente den Fluss auf dem kürzesten Weg von Südwesten nach Nordosten.
   (i) Geben Sie $\vec{v}/|\vec{v}|$ an.
   (ii) Bestimmen Sie $|\vec{v}|$.
   (iii) Wieviel Zeit benötigt sie diesmal für die Durchquerung?

**Aufgabe 2** (2+4+2+4+2 = 14 Punkte)

In Tübingen ist eine Vampir-Plage ausgebrochen. Als Wissenschaftler an den Tübinger Uni-Kliniken haben Sie den ersten Vampir selbst gesehen. Um das Anwachsen der Vampir-Population zu dokumentieren, erheben Sie folgende Daten:

| Tag $t$ nach Auftreten des ersten Vampirs | 0 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Gesamtzahl $N$ der Tübinger Vampire | 1 | 9 | 27 | 81 |

a) Was für eine Funktion $N(t)$ (linear, exponentiell, Potenzgesetz,...) wäre ein gutes Modell für das Anwachsen der Vampir-Population?

b) Tragen Sie die Datenpunkte aus der Tabelle in ein Diagramm mit logarithmischer $N$-Achse ein. Wählen Sie dabei eine *geschickte* Einteilung der $N$-Achse, d.h. beschriften Sie die Achsenabschnitte mit $a^0$, $a^1$, $a^2$ etc. mit geeignetem $a$.
HINWEIS: Weder $a = 10$ noch $a = \mathrm{e}$ sind geschickt.

c) Zeichnen Sie auch den Graph eines geeigneten Modells für das Anwachsen der Vampir-Population (siehe Teil a) in Ihr Diagramm aus Teil b ein.

d) Bestimmen Sie die Funktion $N(t)$ für Ihr Modell.

e) Tübingen hat ungefähr 88 000 Einwohner. Wie lange dauert es nach Ihrem Modell bis ganz Tübingen ausschließlich von Vampiren bewohnt wird? Nehmen Sie dazu an, dass die Vampir-Plage auf Tübingen beschränkt bleibt.

**Aufgabe 3** (3+3+3+3+6 = 18 Punkte)

Sei

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

die Leslie-Matrix für ein Populationsmodell mit drei Populationsstadien, d.h. zur Zeit $t$ wird die Population durch den Vektor $\vec{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)})^T$ beschrieben und es gilt $\vec{x}^{(t+1)} = L\vec{x}^{(t)}$ für $t \in \mathbb{N}_0$.

a) Geben Sie $x_1^{(t+1)}$ als Funktion von $x_1^{(t)}$, $x_2^{(t)}$ und $x_3^{(t)}$ an.

Zur Zeit $t = 1$ sei der Populationsvektor $(7500, 4000, 2500)^T$.

b) Welchen Wert hatte der Populationsvektor zur Zeit $t = 0$, d.h. bestimmen Sie $\vec{x}^{(0)}$.

c) Berechnen Sie $L^2$.

d) Welchen Wert hat der Populationsvektor zur Zeit $t = 3$, d.h. bestimmen Sie $\vec{x}^{(3)}$.

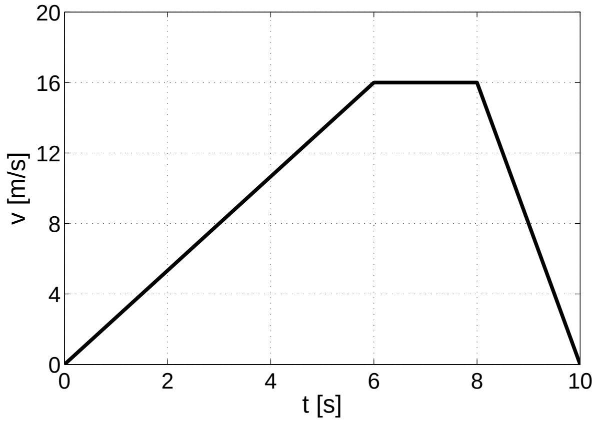
e) Nach langer Zeit stellt sich ein Gleichgewicht ein.

   (i) Bestimmen Sie alle möglichen Gleichgewichtspopulationen, d.h. alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die $L\vec{x} = \vec{x}$ erfüllen.

   (ii) In unserem speziellen Fall befinden sich im zweiten Stadium der Gleichgewichtskonfiguration 5000 Individuen. Wie lautet der zugehörige Gleichgewichtsvektor?

**Aufgabe 4** (3+4+3 = 10 Punkte)

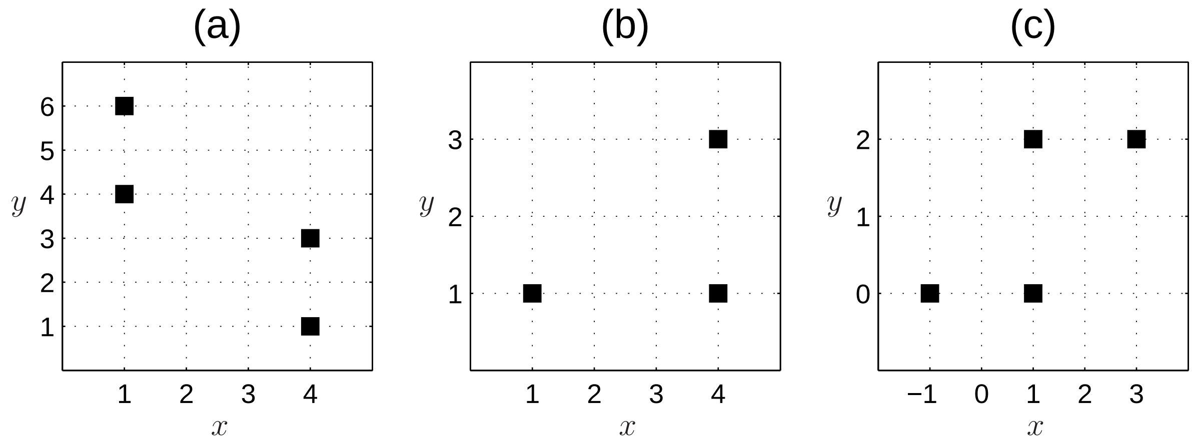
Im nebenstehenden Diagramm ist die Geschwindigkeit $v$ eines Autos als Funktion der Zeit $t$ dargestellt. Zur Zeit $t = 8\,\mathrm{s}$ leitet die Fahrerin eine Vollbremsung ein und kommt zur Zeit $t = 10\,\mathrm{s}$ unmittelbar vor einer Mauer zum Stillstand.




a) Zeichnen Sie ein Diagramm der Beschleunigung $a = \dot{v}$ als Funktion der Zeit.
b) Welche Strecke legt das Auto von der Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$ bis zur Zeit $t = 8\,\mathrm{s}$ zurück?
c) Angenommen die Bremsen versagen, zu welchem Zeitpunkt $t_K$ fährt das Auto (bei ungebremster gerader Weiterfahrt) gegen die Mauer?

**Aufgabe 5** (4+4+4 = 12 Punkte)
Sie haben in drei verschieden Experimenten jeweils eine Größe $y$ als Funktion einer Größe $x$ gemessen. Die Messwerte sind in den untenstehenden Diagrammen dargestellt. Sie erwarten überall einen linearen Zusammenhang. Geben Sie für (a)–(c) jeweils die Gleichung der Regressionsgerade an.

Hinweis: Denken Sie daran, dass die Regressionsgerade die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände minimiert. Dann müssen Sie nicht viel rechnen.




**Aufgabe 6** (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Berechnen Sie:

a) $f'(x)$ für $f(x) = \sin(\sin x)$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$

Hinweise: Bei (c) hilft $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
Integrieren Sie bei (d) partiell, leiten Sie dabei die Funktion $x \mapsto x$ ab.