

# Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

## Koordinaten, Funktionen & Etwas Geometrie

Stefan Keppeler

17. Oktober 2011



## Kartesische Koordinaten

Ebene  $\mathbb{R}^2$  und Raum  $\mathbb{R}^3$

Allgemein:  $\mathbb{R}^n$

Punktmengen in der Ebene

Graphen von Funktionen

## Geometrische Operationen in der Ebene

### Euklidischer Abstand

... im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$

... im  $\mathbb{R}^n$

## Umfang, Flächeninhalt & Volumen

Umfang und Flächeninhalt

Oberfläche und Volumen

Skalierungsverhalten

Bären (Bergmannsche Regel)

## Anhang



- ▶ Punkte in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ :  
Angabe eines Pairs von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2) \quad \text{wobei} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$



- ▶ Punkte im Raum  $\mathbb{R}^3$ :  
Angabe eines Tripels von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2, x_3) \quad \text{wobei} \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$



- Allgemein (zunächst abstrakt): Punkte im  $\mathbb{R}^n$ :  
Angabe eines  $n$ -Tupels von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{wobei} \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

**Beispiel:** Betrachte z.B. die Ergebnisse von 7 Temperaturmessungen an aufeinanderfolgenden Tagen als Punkt im  $\mathbb{R}^7$ .



## Bereiche oder “Figuren” in der Ebene

entsprechen (in Koordinaten)

Teil Mengen des  $\mathbb{R}^2$ .

Umgekehrt können wir Teil Mengen des  $\mathbb{R}^2$  graphisch darstellen.




- ▶ **Funktion**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
z.B.  $f_1 : x \mapsto x$  oder  $f_2 : x \mapsto 1 - x^2$   
(kurz:  $f_1(x) = x$  bzw.  $f_2(x) = 1 - x^2$ )
- ▶ **Graph** der Funktion  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$   
ist Figur in der Ebene
- ▶ allgemein:  $f : D \rightarrow W$  wobei  
 $D$ : **Definitionsbereich**  
 $W$ : Wertebereich  
oben:  $D = W = \mathbb{R}$  andere Beispiele:
  - ▶ Temperatur  $T(x, y, z)$  (in  $^\circ\text{C}$ ) an jedem Punkt  $(x, y, z)$  des Raumes, d.h.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,
  - ▶ oder, der Raum ist nur endlich groß (sagen wir quaderförmig),  
 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$ ,  
dann wäre  $T : D \rightarrow \mathbb{R}$



Geometrische Operationen in der Ebene entsprechen algebraischen Operationen mit den Koordinaten, z.B.

Translation (Verschiebung)	$(x, y) \mapsto (x + u, y + v)$
zentrische Streckung (Vergrößerung)	$(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y), \alpha > 1$
Streckung in $x$ -Richtung	$(x, y) \mapsto (\alpha x, y), \alpha > 1$
Streckung in $y$ -Richtung	$(x, y) \mapsto (x, \alpha y), \alpha > 1$
Spiegelung an der $x$ -Achse	$(x, y) \mapsto (x, -y)$
Spiegelung an der $y$ -Achse	$(x, y) \mapsto (-x, y)$
Punktspiegelung im Ursprung	$(x, y) \mapsto (-x, -y)$

Alle Operationen sind Funktionen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . 

Wie wirkt sich Operation auf Funktionsgraph aus? 



**Abstand**  $d$  zweier Punkte  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$


- ▶ Hilfspunkt  $(u_1, v_2)$  ... rechtwinkliges Dreieck
- ▶ **Satz des Pythagoras** liefert



$$d(u, v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2},$$

definiert Abstandsfunktion  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Analog im  $\mathbb{R}^3$

- ▶ Raumdiagonale
- ▶  $2 \times$  Pythagoras 

$$d(u, v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2},$$

d.h.  $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto d(u, v)$ .





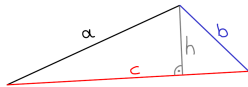
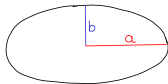
Entsprechend **definiert** man den Abstand zweier Punkte  $u, v \in \mathbb{R}^n$  durch

$$\begin{aligned}d(u, v) &:= \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - u_i)^2} \\ &= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2}\end{aligned}$$



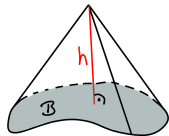
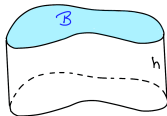
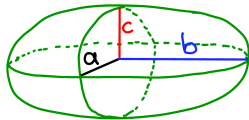


Form	Umfang	Flächeninhalt
Quadrat	$4a$	$a^2$
Rechteck	$2a + 2b$	$ab$
Kreis	$2\pi r$	$\pi r^2$
Ellipse	keine einfache Formel	$\pi ab$
Dreieck	$a + b + c$	$\frac{1}{2}ch$





Form	Oberfläche	Volumen (Rauminhalt)
Würfel	$6a^2$	$a^3$
Quader	$2ab + 2bc + 2ac$	$abc$
Kugel	$4\pi r^2$	$\frac{4\pi}{3}r^3$
Ellipsoid	keine einfache Formel	$\frac{4\pi}{3}abc$
Prisma, Zylinder	$hU + 2B$	$hB$
Kegel, Pyramide	keine allgemeine Formel	$\frac{1}{3}hB$



**Beobachtung:** Bei einer zentrischen Streckung um einen Faktor  $\alpha > 0$  (d.h.  $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$  im  $\mathbb{R}^2$ , bzw.  $(x, y, z) \mapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$  im  $\mathbb{R}^3$ ) gilt bei allen Objekten

- ▶ Weglängen (z.B. Umfang) wachsen<sup>1</sup> um Faktor  $\alpha$
- ▶ Flächen wachsen um Faktor  $\alpha^2$
- ▶ Volumina wachsen um Faktor  $\alpha^3$

Dies ist formunabhängig!

**Anwendung:** Bergmannsche Regel  
Innerhalb einer Verwandtschaftsreihe sind warmblütige Tiere im kalten Klima großwüchsig.

**Erklärung:** 

---

<sup>1</sup>bzw. schrumpfen für  $0 < \alpha < 1$

## Eisbär



♀ 1,90m–2,10m  
♂ 2,40m–2,60m



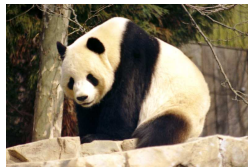
## Kragenbär



1,20m–1,80m



## Großer Panda



1,20m–1,50m



- **Kreis** mit Radius  $r > 0$  um Mittelpunkt  $u \in \mathbb{R}^2$

$$K_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, v) = r\}$$

- analog die **Kreisscheibe** (Radius  $r > 0$ , Mittelpunkt  $u \in \mathbb{R}^2$ )

$$I_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, v) \leq r\}$$

- $K_r(u)$  ist **Lösungsmenge** der Gleichung

$$d(u, v) = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 = r^2$$

(quadratische Gleichung)



- Betrachte nun  $v_1$  als gegeben und suche  $f$  so, dass  $v_2 = f(v_1)$ , d.h. löse nach  $v_2$  auf:



$$v_2 = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2}, \quad |v_1 - u_1| \leq r$$

- Damit ist  $K_r(u)$  Vereinigung der Graphen von  $f_+$  und  $f_-$ ,

$$f_{\pm}(v_1) = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2},$$

beide mit Definitionsbereich

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - u_1| \leq r\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid u_1 - r \leq x \leq u_1 + r\} \\ &= [u_1 - r, u_1 + r] \end{aligned}$$



Kugel mit Radius  $r > 0$  um Mittelpunkt  $u \in \mathbb{R}^3$

- ▶ Kugeloberfläche (**Sphäre**, engl. *sphere*)

$$S_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid d(u, v) = r\}$$

- ▶ **Vollkugel** (engl. *ball*)

$$B_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid d(u, v) \leq r\}$$

Sphäre als Funktionsgraph?

- ▶ Sphäre ist Lösungsmenge von

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 = r^2$$

... auflösen nach  $v_3$





- ... auflösen nach  $v_3$

$$v_3 = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}, \quad (v_1, v_2) \in I_r(u_1, u_2)$$

... zwei Funktionen

$$f_{\pm}(v_1, v_2) = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}$$

mit Definitionsbereich  $D = I_r(u_1, u_2)$ .

- Damit ist  $S_r(u)$  Vereinigung der Graphen

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f_+(x, y), (x, y) \in I_r(u_1, u_2)\}$$

und  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f_-(x, y), (x, y) \in I_r(u_1, u_2)\}$



## Zahlenmengen

- ▶  $\mathbb{N}$  die natürlichen Zahlen  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ,
- ▶  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  die natürlichen Zahlen inkl. der Null,
- ▶  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  die ganzen Zahlen,
- ▶  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$   
die rationalen Zahlen – Brüche bzw. Zahlen mit endlicher oder periodischer Dezimalbruchentwicklung,
- ▶  $\mathbb{R}$  die reellen Zahlen – enthalten zusätzlich zu  $\mathbb{Q}$  Zahlen wie  $\sqrt{2} \approx 1,414\dots$ ,  $\pi \approx 3,141\dots$  oder  $e \approx 2,718\dots$ , die nicht als Bruch geschrieben werden können.

**Bemerkung:**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

