

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Exponentielles Wachstum

Stefan Keppeler

24. Oktober 2011



Fibonacci-Zahlen

Kaninchenvermehrung

Fibonacci-Folge

Geometrische Progression

... und Fibonacci: Phyllotaxis

... vs. Arithmetische Progression

... mit zeitlich veränderlichem Wachstumsfaktor

Verschiedene Mittelwerte

Geometrisches Mittel vs. arithmetisches Mittel

Beispiele



Fibonacci Modell der Kaninchenvermehrung:¹

- ▶ Kaninchen wird einen Monat nach Geburt geschlechtsreif – zwei Junge pro Paar
- ▶ einen Monat später nochmals 2 Junge
- ▶ einen weiteren Monat später stirbt es

Beginn im ersten Monat mit $F_1 = N$ neugeborenen Tieren (z.B. $N = 1000$): **Geburten** im...

- ▶ ...zweiten Monat: $F_2 = N$
- ▶ ...dritten Monat: $F_3 = 2N$
(Tiere aus erstem und zweitem Monat bekommen Junge),
- ▶ ...im t -ten Monat: (Rekursionsvorschrift)

$$F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$$



Leonardo von Pisa,
genannt Fibonacci

¹nicht ganz original



| | |
|-------|-----|
| Janu | 1 |
| Febr | 1 |
| März | 2 |
| April | 3 |
| Mai | 5 |
| Juni | 8 |
| Juli | 13 |
| Aug | 21 |
| Sept | 34 |
| Oct | 55 |
| Nov | 89 |
| Dec | 144 |
| | 233 |

$F_1, F_2, F_3 \dots$ ist eine Rekursionsfolge.

Die ersten Glieder sind 

$$N, N, 2N, 3N, 5N, 8N, 13N, \dots$$

(Faktor N nicht weiter interessant – rausdividieren)

Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \dots$$

Rasanten Wachstum, wenn nicht andere Einflüsse entgegen wirken (z.B. Raubtiere, Verknappung von Ressourcen wie Nahrung und Platz, Krankheiten, ...)


← aus Fibonacci *Liber abbaci* (1227)



Ähnliches aber einfacheres Modell:

- ▶ Population wächst jährlich um Faktor $\alpha > 0$
genauer: ... wächst für $\alpha > 1$ und schrumpft für $\alpha < 1$
- ▶ Rekursionsformel



$$G_t = \alpha G_{t-1}, \quad t \in \mathbb{N}$$

Man sieht sofort 

$$G_t = \alpha^t G_0$$

Solche Folgen ($G_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$) heißen **geometrische Progressionen**
oder **exponentielle Wachstumsfolgen** (t steht im Exponent)

Beispiele:

- ▶ $G_0 = 1$, $\alpha = 2$: Zweierpotenzen 
- ▶ Guthaben G_0 auf Sparbuch, 3% Zinsen
Guthaben G_t nach t Jahren: 

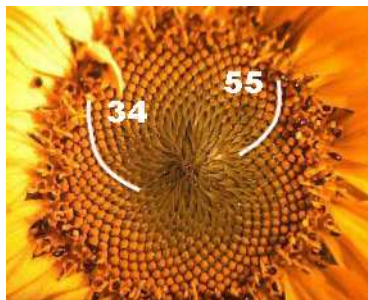


Hintergrund zum Auftreten von **Fibonacci-Zahlen** in bei der **Anordnung von Samen, Blütenblättern** o.ä.

- ▶ Verhältnis $\frac{F_{t+1}}{F_t}$ zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich für große t der Zahl $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (**Goldener Schnitt**, Erklärung später)
- ▶ Fibonacci-Folge wächst also asymptotisch wie geometrische Progression mit $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- ▶ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist "maximal irrational", d.h. schlecht durch rationale Zahlen approximierbar (ohne Beweis)
- ▶ Verwende $\alpha \cdot 360^\circ$ als "Vorrückwinkel" bei der Anordnung von z.B. Samen in Blütenständen von Sonnenblumen



- Dieses “Konstruktionsprinzip” führt zu erkennbaren rechts- und linkslaufenden Spiralen² deren Anzahlen zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind (Das war jetzt noch kein Beweis. . .)



²Kann man ausprobieren auf:

www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Rekurs/Seite08.htm





- ▶ Die Teichrose verdoppelt jeden Tag die bedeckte Wasseroberfläche.
- ▶ Nach 30 Tagen ist der Teich vollständig bedeckt.
- ▶ Wann war er halb bedeckt?

Vorsicht: Geometrische Progression nicht verwechseln mit
arithmetischer Progression (linear Wachstumsfolge)

$$A_t = A_0 + \beta t, \quad \beta \in \mathbb{R}$$


($\beta > 0$: Wachstum, $\beta < 0$: Schrumpfung)

Rekursion

$$A_t = A_{t-1} + \beta$$

- ▶ arithmetische Progression: Wachstum um festen Betrag
- ▶ geometrische Progression: Wachstum proportional zu vorhandener Menge

Beispiele:

- ▶ $A_0 = 0, \beta = 2$: nichtnegative gerade Zahlen 
- ▶ Guthaben A_0 auf Girokonto (keine Zinsen)
 - ▶ monatliches Einkommen: 850€
 - ▶ monatliche Ausgaben: 700€

Guthaben A_t nach t Monaten:



Beobachtung:

- ▶ β hat die **Dimension** von A_t durch Zeit (Dimension von t), also z.B. die Einheit $\text{€}/\text{Monat}$, falls A_t Geld in € und t Zeit in Monaten ist.
- ▶ α dagegen ist **dimensionslos** (reine Zahl)


Bemerkung:

In $A_t = A_0 + \beta t$ passen die Dimensionen so, aber was ist in $A_t = A_{t-1} + \beta$?




Exponentielles Wachstum mit zeitlich veränderlichem Wachstumsfaktor, d.h. statt α nun α_t

$$G_t = \alpha_t G_{t-1}$$

Dann gilt 

$$G_t = \alpha_t \alpha_{t-1} \cdots \alpha_1 G_0 = G_0 \prod_{s=1}^t \alpha_s$$

Was ist der **mittlere Wachstumsfaktor** $\bar{\alpha}$?

Vergleiche mit Folge, die jedes Jahr gleich wächst und zum selben Ergebnis G_t kommt, fordere also 

$$G_0 \prod_{s=1}^t \alpha_s \stackrel{!}{=} \bar{\alpha}^t G_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\alpha} = \sqrt[t]{\prod_{s=1}^t \alpha_s} = \left(\prod_{s=1}^t \alpha_s \right)^{1/t},$$

geometrisches Mittel der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_t$.



- ▶ Geometrisches Mittel der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_t > 0$:

$$\bar{\alpha} = \left(\prod_{s=1}^t \alpha_s \right)^{1/t}$$

Spezialfall:

Das geometrische Mittel zweier Zahlen $a, b > 0$ ist \sqrt{ab} 

- ▶ Nicht verwechseln mit dem **arithmetischen Mittel** von t Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{R}$:

$$\langle \beta \rangle = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t \beta_s = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_t}{t}$$




► Niederschlag

| Januar | Februar | März |
|--------|---------|-------|
| 15 mm | 16 mm | 17 mm |

Quartalsdurchschnitt: 16mm (arithmetisches Mittel)

- Ein Schiff fährt zunächst
 - 300 km weit mit 20 km/h und dann
 - 300 km weit mit 30 km/h.

Wie schnell fährt es im Durchschnitt? 

Die Durchschnittsgeschwindigkeit 24 km/h ist weder das arithmetische Mittel (25 km/h) noch das geometrische Mittel (24,49.. km/h) sondern das **harmonische Mittel**,

$$\bar{v}^h = \frac{t}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_t}}.$$

Wir mitteln hier verschiedene Geschwindigkeiten bei **gleichen Strecken** (bei gleichen Laufzeiten bräuchten wir das arithmetische Mittel).

