

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen  
Exponentialfunktion & Logarithmus

Stefan Keppeler

31. Oktober 2011



## Potenzen

Definitionsbereiche

Potenzrechenregeln

## Exponentialfunktion

Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse

Beispiel

$\exp$

Dimensionen

Beispiel: Radioaktiver Zerfall

Beispiel: Lichtabsorption

## Logarithmus

Definition

## Umkehrfunktionen

Injektivität

Beispiel:  $\sqrt{x}$

Monotonie



Potenzen  $x^\alpha$  sind auf dreierlei Definitionsbereichen erklärt:

- ▶  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\alpha \in \mathbb{Z}$
- ▶  $x = 0$  und  $\alpha \geq 0$
- ▶  $x > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Nicht erklärt (in  $\mathbb{R}$ ) ist  $x^\alpha$  demnach für

- ▶  $x = 0$  und  $\alpha < 0$  (also nicht " $\frac{1}{0}$ ")
- ▶  $x < 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  (also z.B. nicht " $\sqrt{-1}$ ")


Übrigens:

- ▶  $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$  (für  $x \neq 0$ )
- ▶  $x^{1/2} = \sqrt{x}$  und  $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$



## Rechenregeln

- ▶  $x^\alpha x^\beta = x^{(\alpha+\beta)}$
- ▶  $x^0 = 1$ ,  $x^1 = x$  und  $0^\alpha = 0$  (für  $\alpha > 0$ )
- ▶  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- ▶  $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$

Beispiel:  $\sqrt[3]{9^{-2} \cdot 3} =$  

Außerdem:

- ▶ wenn  $0 < x < y$  und  $\alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha < y^\alpha$
- ▶ wenn  $0 < x < y$  und  $\alpha < 0 \Rightarrow x^\alpha > y^\alpha$



, vergleiche auch mit ÜA 21.



## Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse

- ▶ Bisher: ganzzahlige Zeit  $t$  (zeitdiskret)
- ▶ Jetzt auch:  $t \in \mathbb{R}$  (kontinuierlich)
- ▶ Gleichungen

$$G_t = \alpha^t G_0 \quad (\text{geometrisch}) \quad (1)$$

$$A_t = A_0 + \beta t \quad (\text{arithmetisch}) \quad (2)$$

bleiben gültig (nicht jedoch die Rekursionen!).

- ▶ Funktionen
  - ▶ der Form (1) heißen **Exponentialfunktionen**,
  - ▶ der Form (2), **linear** bzw. affin-linear.


### Notation:

Statt  $G_t$  bzw.  $A_t$  schreibt man auch oft  $G(t)$  bzw.  $A(t)$ .



## Beispiel:

- ▶ Kredit über 100€ zu 6% Jahreszins

- ▶ Rückzahlung nach halbem Jahr: Wieviel? 

$$G_{1/2} = \alpha^{1/2} G_0 = \sqrt{1,06} \cdot 100\text{€} \approx 102,96\text{€},$$

nicht mit  $\frac{6\%}{2} = 3\%$  verzinsen, 3€ Zinsen wären zu viel.


- ▶ Entsprechend: Schuld nach einem Monat:

$$G_{1/12} = \alpha^{1/12} G_0 \approx 100,487\text{€}$$

- ▶ Insbesondere ist der monatliche Zinssatz  $\approx 0,487\%$ ,  
und damit geringer als  $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$  (vgl. Zinsezins)




## Andere Schreibweise:

- ▶  $\alpha^t = e^{\gamma t}$ ,
- ▶ wobei  $e = 2,71828182846\dots$  (**Eulersche Zahl**),
- ▶ und  $\gamma \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $e^\gamma = \alpha$ . 
- ▶  $e$  als Basis ist geschickt, da  $(e^x)' = e^x$ . (Ableitung, später)
- ▶ Statt  $e^x$  schreibt man auch  $\exp(x)$  (**Exponentialfunktion**).



## Dimensionen

- ▶ Betrachte  $t$  nicht als reine Zahl (z.B. Anzahl Jahre), sondern als **dimensionsbehaftet** (verstrichene Zeit)
- ▶ Exponent muss dimensionlos sein
  - ▶ schreibe daher statt  $\alpha^t$  nun  $\alpha^{t/T}$ ,
  - ▶ mit Vergleichs-Zeitraum  $T$  (frei wählbare **Einheit**)
- ▶ Mit  $\lambda = \frac{\gamma}{T}$  gilt:   $\alpha^{t/T} = (e^\gamma)^{t/T} = e^{\gamma t/T} = e^{\lambda t}$
- ▶ Dimension:  $[\lambda] = 1/[t]$
- ▶ Bedeutung folgt aus  $G_{1/\lambda} = e G_0$  bzw.  $G_{-1/\lambda} = \frac{1}{e} G_0$ :
  - ▶  $\lambda > 0$ :  $\frac{1}{\lambda}$  ist die Zeit, in der  $G$  auf das  $e$ -fache anwächst
  - ▶  $\lambda < 0$ :  $-\frac{1}{\lambda}$  ist die Zeit, in der  $G$  auf das  $\frac{1}{e}$ -fache abfällt





## Beispiel: Radioaktiver Zerfall

- ▶  $G(t)$ : **Materialmenge** (in Anzahl Atome oder Mol oder kg... ) als Funktion der Zeit  $t$  ist Exponentialfunktion,

$$G(t) = G(0) e^{-\lambda t},$$

mit Materialkonstante  $\lambda > 0$ .

- ▶  $Z(t)$ : Anzahl **Zerfälle** in einem Zeitintervall  $[t, t + T]$ ,  $T$  fest), ist ebenfalls Exponentialfunktion,

$$Z(t) = Z(0) e^{-\lambda t}$$

mit derselben Konstante  $\lambda > 0$ .

- ▶ **Bedeutung:**

In gleich langen Zeitintervallen  $[t, t + T]$  zerfällt stets derselbe Anteil der zu Beginn vorhandenen Menge.



## Beispiel: Lambert–Beer-Gesetz der Lichtabsorption


Legt ein monochromatischer (einfarbiger) Lichtstrahl der einfallenden Intensität (Energie)  $I_0$  durch ein absorbierendes Medium (z.B. Farbstoff) den Weg  $s$  zurück, so beträgt die Intensität des austretenden Strahls

$$I_s = I_0 e^{-\lambda s},$$

wobei die Konstante  $\lambda$  vom Material, von der Konzentration des Materials (z.B. in Wasser gelöster Farbstoff) und der Farbe (Wellenlänge) des Lichts abhängt.



## Herleitung: Lambert-Beer-Gesetz der Lichtabsorption

- ▶ Die Intensität des austretenden Strahls  $I_{\text{aus}}$  ist immer proportional zur Intensität des einfallenden Strahls  $I_{\text{ein}}$ .
- ▶ Skizze 

$$\Rightarrow \alpha_{s_1} \cdot \alpha_{s_2} = \alpha_{s_1+s_2}$$

- ▶ Klappt nur, falls  $\alpha_s = e^{-\lambda s}$ , denn

$$\alpha_{s_1} \alpha_{s_2} = e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda s_2} = e^{-\lambda(s_1+s_2)} = \alpha_{s_1+s_2} \cdot$$



- ▶ Der **Logarithmus** ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h.

$$y = \log x$$

ist die eindeutige Lösung der Gleichung  $e^y = x$  zu gegebenem  $x > 0$ .



- ▶ Es gilt also  $\log(e^x) = x$  für  $x \in \mathbb{R}$  sowie  $e^{\log x} = x$  für  $x > 0$ .
- ▶ Damit folgen Rechenregeln für den Logarithmus aus den Potenzrechenregeln

**Beispiel:**



- ▶ **Notation:**

Machmal schreibt man auch  $\ln$  (*Logarithmus naturalis*) statt  $\log$  – wir schreiben  $\log$ .



Wann besitzt eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  eine Umkehrfunktion?

**Definition:** Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt **injektiv**, wenn die Bilder verschiedener Elemente stets verschieden sind, d.h.

$$f(x) \neq f(y) \quad \text{für} \quad x \neq y.$$

- ▶ Wenn  $f$  nicht injektiv ist, dann besitzt die Gleichung  $f(x) = b$  für manche  $b$  mehrere Lösungen  $x$ .
- ▶ Wenn  $f$  injektiv ist, dann besitzt sie genau eine Lösung, genannt  $x = f^{-1}(b)$ , für jedes  $b \in f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ .



**Definition:** Die so definierte Funktion  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  heißt **Umkehrfunktion** von  $f$  und erfüllt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$



## Beispiel:

- ▶ Die Wurzelfunktion  $x \mapsto \sqrt{x}$  ist die Umkehrfunktion der Funktion  $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f_1(x) = x^2$ .
- ▶ Ebenso ist  $x \mapsto -\sqrt{x}$  die Umkehrfunktion von  $f_2 : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_2(x) = x^2$ .



## Beachte: (Notation)

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$



**Definition:** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- **streng monoton wachsend**, wenn  $f(x) < f(y)$  für  $x < y$ ,
- **streng monoton fallend**, wenn  $f(x) > f(y)$  für  $x < y$ ,
- **monoton wachsend**, wenn  $f(x) \leq f(y)$  für  $x < y$  und
- **monoton fallend**, wenn  $f(x) \geq f(y)$  für  $x < y$ .

**Beispiele:**

- ▶  $\exp$  ist streng monoton wachsend
- ▶  $f = \text{const}$  ist monoton wachsend und fallend, aber nicht streng
- ▶  $x \mapsto x^\alpha$  auf dem Definitionsbereich  $D = [0, \infty)$  ist streng monoton wachsend für  $\alpha > 0$  und fallend für  $\alpha < 0$ .



## Satz:

Streng monotone Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  sind injektiv.

Beweis: 

## Folgerung:

- ▶ Da  $\exp$  streng wachsend ist,
- ▶ und da  $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ,
- ▶ existiert auf  $D = \mathbb{R}^+$  die Umkehrfunktion,  
genannt  $\log$  (Logarithmus).

