

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen  
**Vektorrechnung**

Stefan Keppeler

14. November 2011



## Vektoren

Definition & Notation

Betrag & Summe

## Beispiele

Addition von Kräften


## Rechenregeln

Addition

Skalare Multiplikation

Skalarprodukt




- ▶ Vektoren werden zur Darstellung **gerichteter Größen** verwendet.
- ▶ Man stelle sich also einen Pfeil in eine bestimmte **Richtung** mit einer bestimmte Länge (**Betrag**) vor. 

### Zum Rechnen:

Darstellung durch Komponenten in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad u_i \in \mathbb{R} \quad (\text{Spaltenvektor})$$

...oder Zeilenvektor:  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  

**Notation:** Oft auch  $\mathbf{u}$  statt  $\vec{u}$  oder einfach  $u$  für Vektoren im  $\mathbb{R}^n$



**Definition:** Der **Betrag** oder die **Norm** eines Vektors  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  ist

$$|\vec{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}. \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="658 288 708 355"/>$$



(stimmt überein mit dem Abstand des Punktes mit Koordinaten  $u_1, u_2, \dots, u_n$  vom Ursprung.)

**Definition:** Die **Summe** zweier Vektoren  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  und  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  im  $\mathbb{R}^n$  ist komponentenweise erklärt,

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Geometrische Bedeutung: **Parallelogrammaddition** 




- ▶ **Geschwindigkeiten** addieren sich vektoriell, z.B. gehende Person auf Schiff. 
- ▶ **Translationen** addieren sich vektoriell, z.B. Fahrt von Tübingen nach Ulm, via Stuttgart 
- ▶ Mittelung von **Richtungen**:  
Himmelsrichtung in die ein Zugvogel morgens losfliegt, repräsentiert durch einen Vektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\vec{u}| = 1$ .  
Mittelung der Winkel? Oder über Vektoraddition?

$$\vec{u} = \frac{1}{N} (\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_N)$$




- **Addition von Kräften:** Elektrisch geladene Teilchen (z.B. Elektronen, Ionen, Staubkörner), nummeriert von **1** bis  **$N$** .
  - Kraft auf Teilchen Nr.  $i$ :

$$\vec{K}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{K}_{ij} \quad (\text{Vektorsumme})$$

$\vec{K}_{ij}$ : Kraft, die Teilchen Nr.  $j$  auf Teilchen Nr.  $i$  ausübt (elektrostatische Anziehungs- oder Abstoßungskraft). 

- $\vec{K}_{ij}$  zeigt nach **Coulombschen Gesetz** in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Teilchen  $i$  und  $j$ ; Betrag

$$|\vec{K}_{ij}| = \frac{q_i q_j}{d(\vec{x}_i, \vec{x}_j)^2}, \quad d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|,$$

wobei  $q_i \in \mathbb{R}$  die Ladung und  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$  die Position von Teilchen  $i$  ist. 

**Rechenregeln:**  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  (Vektoren)

- ▶  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (Kommutativität)
- ▶  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (Assoziativität)
- ▶  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall \vec{u}$ , wobei  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$   
(Existenz eines neutralen Elements, "Nullvektor")
- ▶  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$  wobei  $-\vec{u} = (-u_1, \dots, -u_n)$   
(Existenz des additiv-inversen, "das Negative von  $\vec{u}$ ")

**Beispiele:**

- ▶ Das Negative  $-\vec{u}$  eines Geschwindigkeitsvektors entspricht der Bewegung in die entgegengesetzte Richtung mit (betragsmäßig) gleicher Geschwindigkeit.
- ▶ Eine Punktspiegelung am Ursprung bildet jeden Vektor auf sein Negatives ab.



**Definition:** Das  $\alpha$ -fache eines Vektors  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist definiert als der Vektor

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n).$$

Die so definierte Funktion  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Skalarmultiplikation**.

**Beispiele:**

- ▶ Zentrische Streckung um Faktor  $\alpha > 0$  bildet jeden Punkt/Vektor auf sein  $\alpha$ -faches ab.
- ▶ Kraft = Masse  $\cdot$  Beschleunigung.
- ▶  $\vec{u} \neq \vec{0}$  und  $\alpha\vec{u}$  für  $\alpha > 0$  zeigen in dieselbe Richtung,  $\vec{u} \parallel \alpha\vec{u}$ .
- ▶ Falls  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , dann  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\vec{v} = \alpha\vec{u}$
- ▶ Richtung von  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , gegeben durch **Einheitsvektor**

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

(gleiche Richtung wie  $\vec{u}$  aber Betrag 1)





**Rechenregeln:**  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  (Vektoren),  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (Skalare)

- ▶  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- ▶  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$  (zwei Distributivgesetze)
- ▶  $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$  (Assoziativität)
- ▶  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$  (neutrales Element der Multiplikation)
- ▶  $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- ▶  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ .

**Beachte:** Man multipliziert hier einen Vektor mit einem Skalar, nicht mit einem anderen Vektor! Man kann durch einen Skalar  $\alpha \neq 0$  dividieren (indem man mit  $\alpha^{-1}$  multipliziert), aber man kann nicht durch einen Vektor dividieren!

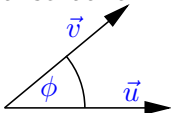


**Definition:** Das (kanonische) **Skalarprodukt** ist eine Abbildung  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , für  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

**Beispiel:** 

- ▶ offensichtlich gilt  $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- ▶ **Rechenregeln:**  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  (Vektoren),  $\alpha \in \mathbb{R}$  (Skalar)
  - ▶  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
  - ▶  $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
  - ▶  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ▶ anschaulich: Winkel zwischen  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \phi$$

