

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Differenzialgleichungen

Stefan Keppeler

23. Januar 2012



Differenzialgleichungen

Beispiel: Luftdruck

Definition

Beispiele: Populationsdynamik

Existenz und Eindeutigkeit

Satz von Picard und Lindelöf

Folgerungen/Bemerkungen

Reduktion...

...von DGLn höherer Ordnung auf Systeme 1. Ordnung

Folgerungen/Bemerkungen

Beispiel

Reaktions-Kinetik



Der **Luftdruck** p erfüllt als Funktion der **Höhe** z über dem Boden die Differenzialgleichung

$$p'(z) = -\frac{Mg}{RT(z)} p(z)$$

mit **Konstanten** M, g, R und der **Temperatur** $T(z)$. **Warum?** 

Lösung für

- ▶ konstante Temperatur: $p(z) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}$
- ▶ linearen Temperaturverlauf $T(z) = T_0 + \gamma(z - z_0)$ ($T_0, z_0 \in \mathbb{R}$):

$$p(z) = p_0 \left(1 + \frac{\gamma}{T_0}(z - z_0)\right)^{-\frac{Mg}{R\gamma}}$$

mit zunächst frei wählbaren Konstanten $p_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

Beweis: Nachrechnen! (Ableiten & Einsetzen)

Aber wie kommt man d'rauf? 



Definition: Eine **Differenzialgleichung** (DGL) ist eine funktionale Beziehung zwischen einer Funktion $\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \mapsto \vec{x}(t)$, und ihren ersten k Ableitungen, d.h.

$$\frac{d^k \vec{x}}{dt^k}(t) = \vec{f} \left(\vec{x}(t), \frac{d\vec{x}}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1} \vec{x}}{dt^{k-1}}(t), t \right). \quad (*)$$

- ▶ Dabei heißt
 - ▶ k die **Ordnung** der DGL,
 - ▶ d die Dimension bzw. die Anzahl der **Freiheitsgrade**.
- ▶ (*) heißt auch auch **System von d gekoppelten Gleichungen**, wenn man statt des Vektors $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^d$ die Komponenten $x_1(t), \dots, x_d(t) \in \mathbb{R}$ als abhängige Variablen auffaßt.
- ▶ Falls f nicht von t abhängt, so heißt die DGL **autonom**.

Beispiele: 



Population habe konstante Wachstumsrate

$$w = g - s$$

mit

- ▶ g = Geburtenrate,
- ▶ s = (natürliche) Sterberate.

Einfachstes Modell für Populationsgröße $N(t)$ ist

$$\dot{N} = wN.$$

- ▶ autonome DGL
- ▶ erster Ordnung ($k = 1$)
- ▶ in einem Freiheitsgrad ($d = 1$)

Allgemeine Lösung (exponentielles Wachstum):

$$N(t) = N_0 e^{wt}.$$



Entnimmt der Mensch (durch Ernten, Jagen, Fischen) die Menge $E(t) dt$ im Zeitintervall $[t, t + dt]$, so lautet die DGL

$$\dot{N} = wN - E.$$

Diese Gleichung ist **nicht autonom**, $f(N, t) = wN - E(t)$.

Typische Fragestellungen:

- ▶ Funktion $t \mapsto E(t)$ explizit bekannt, z.B. $E(t) = c \sin(\omega t)$:
Bestimme Lösung $N(t)$ (analytisch oder numerisch).
- ▶ Oft stellt man aber auch die Frage, wie man E wählen sollte,
um ein bestimmtes Verhalten von N zu erhalten (z.B. keine
dramatische Schrumpfung).



Satz von Picard und Lindelöf (1890)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und f ein Vektorfeld auf D , $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (*)$$

Unter technischen Bedingungen an D und f (D eine offene Menge, f erfüllt eine Lipschitz-Bedingung) gilt:

- ▶ Für jedes $\vec{x}_0 \in D$ existiert **genau eine** Lösungsfunktion $t \mapsto \vec{x}(t)$ von (*).
- ▶ Die Lösung ist definiert auf einem Intervall $(T_{\text{Anfang}}, T_{\text{Ende}})$, das t_0 enthält,
- ▶ wobei $T_{\text{Anfang}} = -\infty$ und/oder $T_{\text{Ende}} = \infty$ sein kann, aber nicht sein muss.




Folgerung/Bemerkungen:

- ▶ Zwei Lösungskurven können sich **nie schneiden**, denn falls

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$$

sowie $\vec{x}(t_0) = \vec{y}(t_0)$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \vec{y}(t) \text{ für alle } t.$$

- ▶ Eine Lösung $\vec{x}(t)$ kann nach endlicher Zeit aufhören zu existieren, indem sie
 - ▶ den Rand des Definitionsbereiches D erreicht.
Beispiel: x reell und positiv: $D = [0, \infty)$.
 Sinkt $x(t)$ auf Null, so kann es nicht mehr weiter sinken. (z.B. Populationsgröße) 
 - ▶ sie in endlicher Zeit ins Unendliche wächst (Singularität).


Beispiel: 



Jede DGL ist äquivalent zu einem DGL-System erster Ordnung, indem man für die Ableitungen von x neue Variablen einführt.

Beispiel: Aus ($k = 2$, $d = 1$)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

machen wir 

- ▶ ein DGL (System) erster Ordnung mit zwei Gleichungen ($k = 1$, $d = 2$);
- ▶ kd ändert sich nicht.



Allgemein wird aus einer DGL der Ordnung k

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}, t\right)$$

ein DGL-System erster Ordnung mit k Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} x_1 := x & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 := \dot{x} = \dot{x}_1 & \dot{x}_2 = x_3 \\ x_3 := \ddot{x} = \dot{x}_2 & \dot{x}_3 = x_4 \\ \vdots & \vdots \\ x_k := \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} & \dot{x}_k = f(x_1, \dots, x_k, t) \end{array}$$

Der Raum \mathbb{R}^k mit den Achsen x_1, \dots, x_k heißt **Phasenraum**.

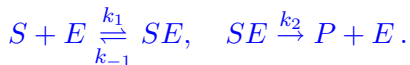


Folgerungen/Bemerkungen:

- ▶ Mit Picard-Lindelöf überträgt sich Existenz und Eindeutigkeit; Dabei sind bei einer DGL der Ordnung k als Anfangswerte die Werte von $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$, \dots , $\frac{d^k x}{dt^k}(t_0)$ vorzugeben.
- ▶ Im Phasenraum können sich zwei Lösungskurven nie schneiden.
- ▶ Gilt analog für ein System der Ordnung k mit d Gleichungen: Diese lassen sich auf ein System erster Ordnung mit kd Gleichungen umschreiben.



Michaelis-Menten-Kinetik (1913): Reaktion unter Einfluss eines Enzyms,



- ▶ S Substrat
- ▶ E Enzym
- ▶ SE Komplex
- ▶ P Produkt
- ▶ k_{-1}, k_1 und k_2 **Ratenkonstanten** (Parameter); legen Reaktionsraten (Reaktionsgeschwindigkeiten) fest.

Massenwirkungsgesetz: Reaktionsrate ist proportional ist zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten,

$$s = [S], \quad e = [E], \quad c = [SE], \quad p = [P].$$



Massenwirkungsgesetz liefert DGL-System:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -k_1 es + k_{-1} c, & \frac{de}{dt} &= -k_1 es + (k_{-1} + k_2) c \\ \frac{dc}{dt} &= k_1 es - (k_{-1} + k_2) c, & \frac{dp}{dt} &= k_2 c.\end{aligned}$$

Anfangsbedingungen:

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems liefert uns die Konzentrationen als Funktion der Zeit.



Vereinfachungen:

- ▶ Die letzte Gleichung ist **entkoppelt** (p taucht nur dort auf)

$$\Rightarrow \quad p(t) = k_2 \int_0^t c(u) \, du \quad p \text{ ist allein durch } c \text{ bestimmt}$$

- ▶ Enzym E ist Katalysator: Gesamtkonzentration (frei plus kombiniert) ist konstant,

$$\frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad e(t) + c(t) = e_0.$$

Erhaltungssatz (vgl. z.B. Energie-Erhaltungssatz in der Physik). Folgt aus DGL-System, indem man die zweite und die dritte Gleichung addiert.



Wir erhalten somit das vereinfachte DGL-System

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1}) c,$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2) c$$

mit Anfangsbedingungen $s(0) = s_0, c(0) = 0$.

Nicht analytisch lösbar, **aber** qualitatives Verhalten ablesbar:

- ▶ Bei $t = 0$ fällt s , während c steigt, von 0 beginnend
- ▶ solange c noch klein ist, muss s weiter fallen und c weiter steigen
- ▶ c steigt so lange bis $\frac{dc}{dt} = 0$, d.h. $c = \frac{k_1 e_0 s}{k_1 s + k_{-1} + k_2}$;
an dieser Stelle gilt $\frac{ds}{dt} = -k_2 c$, also fällt s immer noch.

