Fibonacci-Zahlen ($\times N$)

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

$$G_t = \alpha^1 G_{t-1} = \alpha^2 G_{t-2} = \alpha^3 G_{t-3}$$

$$= \ldots = \alpha^t G_0 = \alpha^{t-1} G_1$$

Bsp: $G_0 = 1, \ \alpha = 2$

$$G_t = 2^t \cdot 1 = 2^t$$ Zweierpotenzen

$2^0 = 1, \ 2^1 = 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ 32, \ \ldots$

Bsp. Sparbuch

Zinssatz z: G_0 Startguthaben

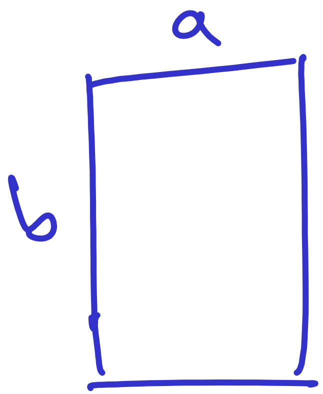
$\alpha = 1 + z$ ($= 1{,}03$ für $z = 3\%$)

$$G_1 = (1+z)\,G_0$$

$$G_2 = (1+z)^2\,G_0$$

$$G_t = (1+z)^t\,G_0$$

Goldener Schnitt

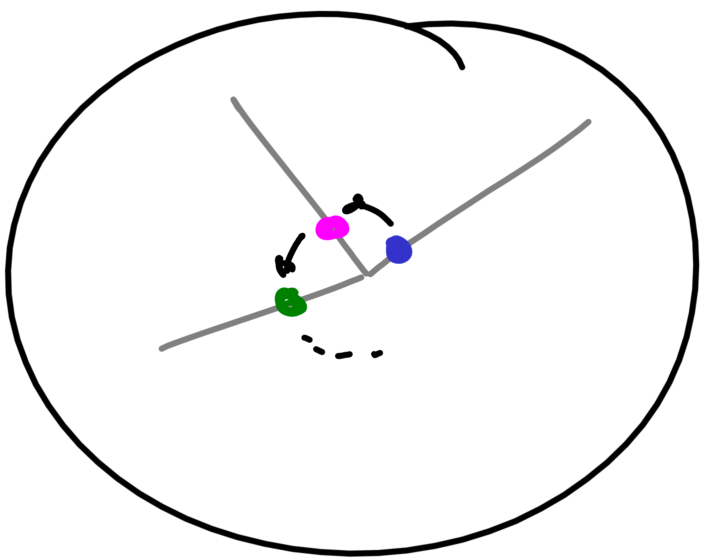


$$\alpha = \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{1}{\alpha} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 + \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Falle Blütenstand:



$A_0 = 0, \beta = 2$

$A_t = 0 + 2 \cdot t = 2t$

also $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$

Girokonto

$A_0, \beta = 850 € / \text{Monat} - 700 € / \text{Monat} = 150 € / \text{Monat}$

$A_t = A_0 + t \cdot 150 € / \text{Monat}$

d.h. $A_1 = A_0 + 150 €, A_2 = A_0 + 300 € \ldots$

$$[A_t] = € = [A_{t-1}]$$

$$[\beta] = €/\text{Monat}$$

$$A_t = A_{t-\underline{\underline{1}}} + \beta \cdot \underline{\underline{\Delta t}}$$

versteckte Zeiteinheit

$$\Delta t = 1 \text{ Monat}$$

$$
\begin{aligned}
G_t &= \alpha_t \, G_{t-1} \\
&= \alpha_t \cdot \alpha_{t-1} \, G_{t-2} \\
&= \alpha_t \cdot \alpha_{t-1} \cdot \alpha_{t-2} \, G_{t-3} \\
&= \alpha_t \cdot \alpha_{t-1} \cdots \alpha_1 \cdot G_0 \\
&= \left(\prod_{s=1}^{t} \alpha_s \right) \cdot G_0 \qquad , \quad t \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Produkt, großes π (Pi)

$$G_t = \underbrace{\left(\prod_{s=1}^{t} \alpha_s \right)}_{\stackrel{!}{=}\ \bar{\alpha}^t} \cdot G_0$$

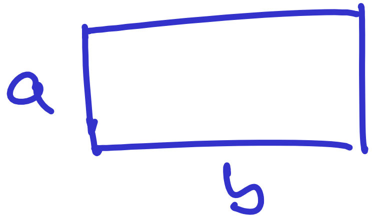
$$\Longrightarrow \quad \bar{\alpha} = \sqrt[t]{\prod_{s=1}^{t} \alpha_s}$$

aus Anfangs- und Endwert:

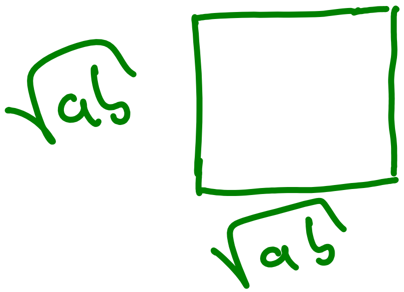
$$\bar{\alpha} = \sqrt[t]{\prod_{s=1}^{t} \alpha_s} = \sqrt[t]{G_t / G_0} = \left(G_t / G_0 \right)^{1/t}$$

geom. Mittel von $a, b > 0$: $\sqrt{ab}$

Rechteck:



Quadrat mit gleicher Fläche



daher „geometrisch“

Das Schiff fährt

- die erste 300 km mit 20 km/h

  braucht dafür also

$$\frac{300\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} = 15\ \text{h}$$

- die zweite 300 km mit 30 km/h ...

$$\frac{300}{30}\ \frac{\text{km}}{\text{km/h}} = 10\ \text{h}$$

insgesamt: 600 km in 25 h

Durchschnittsgeschw.: $\frac{600}{25}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 24\ \text{km/h}$

$\neq \underbrace{\frac{30\ \frac{\text{km}}{\text{h}} + 20\ \text{km/h}}{2}}_{\text{arithm. Mittel}}$, $\neq \underbrace{\sqrt{30\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}}_{\text{geom. Mittel}}$

mit harmon. Mittel

$$\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{20\,\text{km/h}} + \frac{1}{30\,\text{km/h}}} = \frac{120}{3+2}\,\text{km/h} = 24\,\text{km/h}$$

besser erste Rechnung nehmen