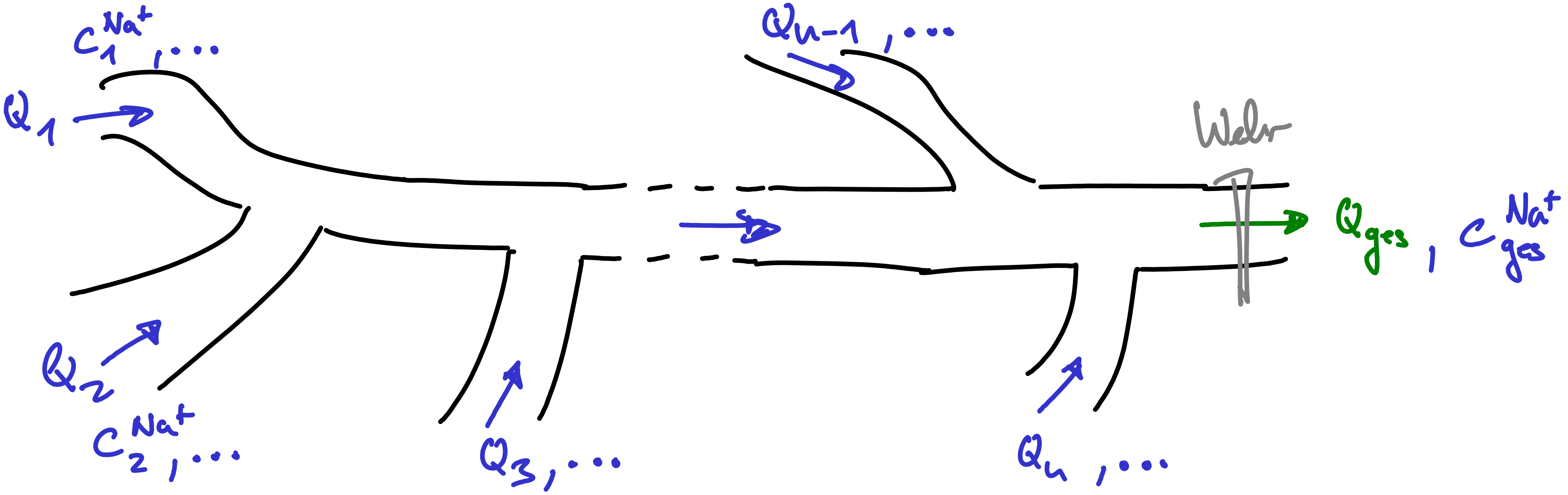


Konzentrationen von z.B. Na^+, K^+, NO_3^-, NO_2^-
HSO_4^-, Pb^{2+}, ...

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_{n-1} + Q_n = Q_{ges}$$ (ohne Versickern etc.)

$$c_1^{Na^+} Q_1 + c_2^{Na^+} Q_2 + \ldots + c_n^{Na^+} Q_n = c_{ges}^{Na^+} Q_{ges}$$

analog für weitere Stoffe, gesucht

- k Stoffe : $k+1$ Gleichungen
- n Variablen

hoffe auf eindeutige Lösung für $k = n-1$
(oder besser: überstimmt..., mehr Stoffe)

geschickt: $x_j = \frac{Q_j}{Q_{ges}}$

$$x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_n = 1$$

$$c_1^{Nat} x_1 + \dots + c_n^{Nat} x_n = c_{ges}^{Nat}$$

Kurzschreibweise

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ c_1^{Nat} & c_2^{Nat} & \dots & c_n^{Nat} & c_{ges}^{Nat} \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$ bedeutet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und ausführlicher

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 5$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mathrm{I}\cdot\frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -2 \quad 5 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 37/12 & -37/6 & 37/3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}\cdot\frac{2}{3} \\ \mathrm{I}\cdot\frac{12}{37} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform

ausgeschrieben

$$x_1 + x_2 + \frac{3}{4} x_3 - \frac{1}{2} x_4 = 4$$
$$x_3 - 2 x_4 = 4$$

zweite Zeile: wähle $x_4 = t \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\Rightarrow \quad x_3 = 4 + 2t$$

erste Zeile: wähle $x_2 = s \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\Rightarrow \quad x_1 = 4 - s - \frac{3}{4}(4+2t) + \frac{1}{2} t$$
$$= 1 - s - t$$

Lösung

allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

mit $t, s \in \mathbb{R}$ beliebig

"Ebene im $\mathbb{R}^4$"

z.Z.: $L_{\vec{0}}$ ist Unterraum

- $L_{\vec{0}} \subseteq \mathbb{R}^m$ (offensichtlich)
- $\vec{u}, \vec{v} \in L_{\vec{0}}$ d.h. $A\vec{u} = \vec{0} = A\vec{v}$

Ist auch $\underline{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}} \in L_{\vec{0}}$? $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

d.h. löst das auch das LGS?

$$
\begin{aligned}
A(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= A(\alpha \vec{u}) + A(\beta \vec{v}) \\
&= \alpha (A\vec{u}) + \beta (A\vec{v}) \\
&= \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} \\
&= \vec{0} \qquad \square
\end{aligned}
$$

z.z.: $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{u} + \vec{y}$ und $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$

($\vec{u}$ haben wir bereits)

"$\Longleftarrow$": $\vec{x} = \vec{u} + \vec{y}$ und $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$

$$\Rightarrow \underline{A\vec{x}} = A\vec{u} + A\vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \underline{\vec{b}}$$

d.h. $\vec{x} \in L_{\vec{b}}$

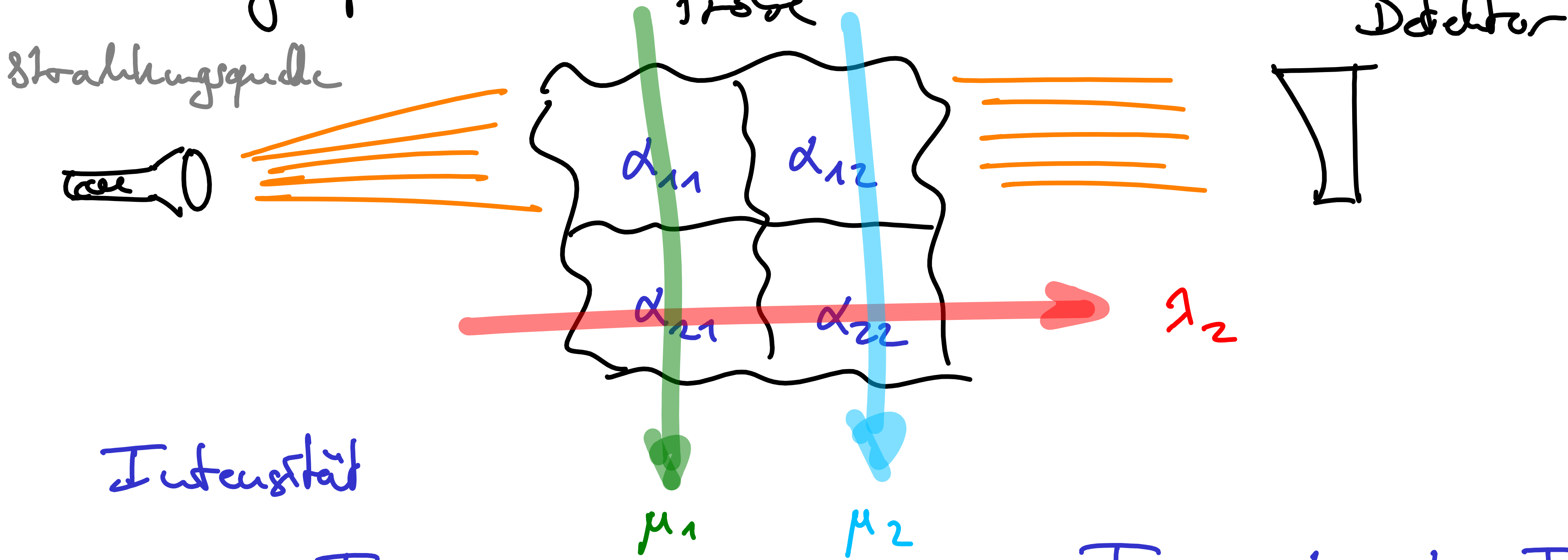
"$\Longrightarrow$": $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \Longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$

$\vec{y} := \vec{x} - \vec{u}$

$$A\vec{y} = A\vec{x} - A\vec{u} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

d.h. $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$, und damit können wir $\vec{x}$ schreiben als $\vec{x} = \vec{u} + \vec{y}$

Tomographie



$$I_0 \longrightarrow I = \alpha_{11} \cdot \alpha_{12} \cdot I_0$$

gesucht $\rightarrow$ $$\lambda_1 = \frac{I}{I_0} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{12}$$ $\leftarrow$ gesucht

$$\log \lambda_1 = \log(\alpha_{11} \cdot \alpha_{12}) = \underline{\log \alpha_{11}} + \underline{\log \alpha_{12}}$$