Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 11.11.11 **vor** der Vorlesung)

Aufgabe 21 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = x^5 \mathrm{e}^{-x}$ b) $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ c) $f(x) = \sqrt{7x^3 + x}$

d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ e) $f(x) = |x^2 - 9|$ f) $f(x) = x|x|$

Aufgabe 22 (3+3+3 = 9 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine an jeder Stelle differenzierbare Funktion. Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung (die dann natürlich von der Ableitung von g abhängt!).

a) $f(x) = \sqrt{g(x)}\, \mathrm{e}^x$ b) $f(x) = \dfrac{x\, \mathrm{e}^{-g(x)}}{\mathrm{e}^x + 1}$ c) $f(x) = |g(x) - 2|$

Aufgabe 23 (3+7 = 10 Punkte)
Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$, d.h.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,, \qquad a_k \in \mathbb{R} \,.$$

a) Berechnen Sie $P^{(\nu)}(x)$.
Hinweis: In Abschnitt 4.5 haben wir die $k$te Ableitung von x^n berechnet.

b) Sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie:

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu \,.$$

Aufgabe 24 (3+3+3 = 9 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^{n-2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{4}{n-1}\right)^{n/2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{2-n}\right)^{2n}$

Aufgabe 25 (3+3+4 = 10 Punkte)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \to x_0$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq -n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$f(x) = o\big((x-x_0)^n\big) \quad \Leftrightarrow \quad (x-x_0)^k f(x) = o\big((x-x_0)^{n+k}\big)$$

Dafür schreiben wir auch kurz $(x-x_0)^k\, o\big((x-x_0)^n\big) = o\big((x-x_0)^{n+k}\big)$.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ sowie $f(x) = o\big((x-x_0)^n)\big)$ und $g(x) = o\big((x-x_0)^m\big)$. Zeigen Sie

$$f(x) + g(x) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big) \;+\; o\big((x-x_0)^m\big) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)$.

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (siehe Lemma 4).