Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 18.11.2011)

Aufgabe 26 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

a) $f_1(x) := 7^x$, b) $f_2 := g \circ f \circ h$, c) $f_3(x) := x^x$ für $x > 0$,

d) $f_4(x) := \log_3(x)$, e) $f_5 := \log_2(g)$, f) $f_6 := f \circ (1/g)$,

wobei $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktionen sind.

Aufgabe 27 (8 Punkte)

Seien $0 < p_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, mit $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$, sowie

$$S(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{j=1}^{n} {p_j}^{\alpha} \right)$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{\alpha \to 1} S(\alpha)$. Hinweis: Denken Sie an die l'Hospitalsche Regel.

Aufgabe 28 (3+6+3 = 12 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

a) Für welche x sind die Funktionen definiert?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 29 (6+6+6 = 18 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$.

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun sinh, cosh und tanh. Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 30 (2+4+2 = 8 Punkte)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh, d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$

an. Bei a und c ist dies eindeutig – bei b sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und von $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$.

(Notwendige Punktzahl: 16 von 64)