

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 25.11.2011)

### Aufgabe 31

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von

- a)  $\operatorname{Arsinh} x$ ,    b)  $\operatorname{Arcosh} x$     und    c)  $\operatorname{Artanh} x$ .

BEMERKUNG: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 29.

### Aufgabe 32

(5 Punkte)

Berechnen Sie  $\operatorname{Artanh}$  nun auch explizit.

HINWEIS: Das Ergebnis hat die Form  $\operatorname{Artanh}(x) = \alpha \log \frac{P(x)}{Q(x)}$   
mit Polynomen  $P$  und  $Q$  sowie  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 33

(6+3+5 = 14 Punkte)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

- a) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit (i)  $f(x) = 1$ , (ii)  $f(x) = -1$  und (iii)  $f(x) = 0$ .  
b) Skizzieren Sie den Graph von  $f$ .  
c) Ist  $f$  in Null stetig? Argumentieren Sie mit  $\varepsilon$  und  $\delta$ , und verwenden Sie dabei Ihre Ergebnisse aus Teil a.

### Aufgabe 34

(4+4+6 = 14 Punkte)

Sei  $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in [-1, 1]$ .

- a) Zeigen Sie:  $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  
HINWEIS: Verwenden Sie das Additionstheorem für  $\cos$ , um  $T_{n\pm 1}$  umzuschreiben.  
b) Berechnen und skizzieren Sie  $T_\nu$  für  $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ .  
HINWEIS: Berechnen Sie zunächst  $T_0$  und  $T_1$  und verwenden Sie dann Teil a.  
c) Zeigen Sie, dass  $T_n$  der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

genügt. Berechnen Sie dazu  $T_n'$  und  $T_n''$ , und setzen Sie ein.

HINWEIS:  $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

### Aufgabe 35

(4+4+4+4+4 = 20 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \quad \forall |x| < 1 .$$

Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

- a)  $\frac{1}{1+x}$     b)  $\frac{1}{1+x^2}$     c)  $\frac{1}{x-3}$     d)  $\frac{1}{27-8x^3}$     e)  $\frac{1+x}{1-x}$

(Notwendige Punktzahl: 16 von 65)