Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 02.12.2011)

Aufgabe 36 (3+3+3 = 9 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?
Hinweis: Denken Sie bei c) an die Herleitung der Taylorreihe von log in der Vorlesung.

Aufgabe 37 (8 Punkte)

Begründen Sie geometrisch, dass $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Leiten Sie daraus und mithilfe der arctan-Reihe eine Reihendarstellung für π her. Nennen Sie die Summe der ersten n Terme dieser Reihe π_n. Berechnen Sie (mit Taschenrechner oder Computer) π_{10}, π_{11} sowie $\frac{1}{2}(\pi_{10} + \pi_{11})$ und vergleichen Sie mit dem Ihnen bekannten Wert für π. Vergleichen Sie gerne auch mit π_{100}.

Aufgabe 38 (4+4+4+4+4 = 20 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt)

a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ b) $\dfrac{x-\sin(x)}{x^2}$ c) $\dfrac{1}{(1-x)(2x+1)}$ d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1-x^2}$

um Null, sowie die Taylorreihe von

e) $\dfrac{1}{(1-x)}$ um $x_0 = 42$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 39 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^7(2x)}{x^4(\mathrm{e}^{-x}-1)^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\log x)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{11}(\cos x - 1)^{1000}}{(\mathrm{e}^x-1)^{2011}}$

Aufgabe 40 (Extremwert-Test) (3+6 = 9 Punkte)

Eine Funktion f sei auf dem Intervall $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ n mal stetig differenzierbar und es gelte für $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$$

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Implikationen gelten:

(i) n ist ungerade $\Longrightarrow$ x_0 ist keine Extremalstelle.

(ii) n gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\Longrightarrow$ x_0 ist lokale Maximalstelle.

n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\Longrightarrow$ x_0 ist lokale Minimalstelle.

Definition: x_0 heißt lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) < f(x_0) \text{ bzw. } f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{aus einer Umgebung von } x_0\,.$$

x_0 heißt Extremalstelle von f, falls x_0 lokale Maximal- oder Minimalstelle ist.

HINWEISE: Stellen Sie $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das $n-1$-te Taylorpolynom plus Restglied dar. Aus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt natürlich auch $f^{(n)}(\xi) \neq 0\ \forall\, \xi$ in einer kleinen offenen Umgebung von x_0.

Aufgabe 41 (12 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - (2+|x|)x^2 + (4-|x|)x + 7}{x^2 - 1}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und skizzieren Sie die Funktion.

(Notwendige Punktzahl: 16 von 74)