Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 09.12.2011)

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+ax^4}}{1-x^2}\mathrm{e}^{-bx^2}$$

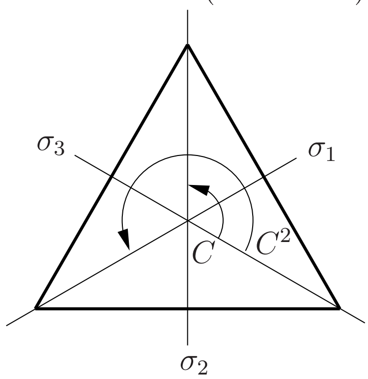
bei Null eine Maximum, für welche ein Minimum? Belegen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 43 (12 Punkte)

Wir betrachten die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Bezeichnen Sie die Spiegelungen an den Seitenhalbierenden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die 120°-Drehung um den Mittelpunkt mit C und die 240°-Drehung um den Mittelpunkt mit C^2 (wieso?). Bestimmen Sie die Gruppentafel. Ist die Gruppe abelsch?

Hinweis: Gehen Sie analog zum Vorlesungsbeispiel vor, wo wir die Symmetriegruppe eines Rechtecks diskutiert haben.



Aufgabe 44 (5+5 = 10 Punkte)

a) Zeigen Sie: Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : [0,1] \to [0,1]$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \;\forall\; x \in [0,1]$) eine Gruppe. Ist diese Gruppe abelsch?

b) Verifizieren Sie: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, d.h. die komplexen Zahlen, mit der üblichen Addition und Multiplikation, ist ein Körper.

Aufgabe 45 (6+6 = 12 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}.$

Aufgabe 46 (4+4+4 = 12 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, bilden einen Vektorraum über den reellen Zahlen.

b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.

c) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

Hinweis: Nehmen Sie in Teil c an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!

(Notwendige Punktzahl: 14 von 56)