Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 23.12.2011)

Aufgabe 52 (10 Punkte)
Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 5$ und $\dim V = 7$ und Basen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_5$ von U und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_7$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_5, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_7\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an (z.B. durch Angabe geeigneter $\vec{a}_j$ und $\vec{b}_j$)!

Aufgabe 53 (3+10+6 = 19 Punkte)
Sei U der durch die folgenden Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^5$,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

a) Welche Dimension hat U?
b) Bestimmen Sie eine ON-Basis von U bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^5$.
c) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 51 c). Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 54 (5+8+2 = 15 Punkte)
Betrachten Sie das LGS

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} \qquad x_j \in \mathbb{R}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bilden Sie das Kreuzprodukt mit $\vec{a}_2$ von rechts und anschießend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit $\vec{a}_3$. Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.
b) Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3.
c) Welche Bedingung müssen die $\vec{a}_j$ erfüllen, damit Sie mithilfe der Formeln aus a und b wirklich die Lösung des LGS erhalten?

Aufgabe 55 (6+6 = 12 Punkte)

a) Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$-2x_1 - 6x_2 + x_3 = 3\,.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

b) Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert. Geben Sie die Hessesche Normalform dieser Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 mit E_1.

Aufgabe 56 (6 Punkte)

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Notwendige Punktzahl: 15 von 62)