Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 20.01.2012)

Aufgabe 61 (6+2+2+2 = 12 Punkte)
Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $Y \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} , \qquad AX = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad AY = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 & 6 \\ -6 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 62 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \pi & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 5 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^7$$

Aufgabe 63 (10 Punkte)
Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I\,, \quad A^1 = A\,, \quad A^2 = AA\,, \quad A^3 = AAA\,, \; \ldots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $\mathrm{e}^{Ax} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweise: (i) Berechnen Sie zunächst A^2, A^3 und A^4. Folgern Sie daraus wie A^{2n} und A^{2n+1} aussehen. (ii) Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 64 (10 Punkte)
Seien $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$ gegeben. Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die $(A\vec{x}) \cdot (A\vec{x}) + \vec{c}^2 = 2\,\vec{c} \cdot (A\vec{x})$ erfüllen.

Aufgabe 65 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die $z^3 = 1$ erfüllen, und gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Schreiben Sie z als $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
- Berechnen Sie z^3.
- Nun gilt $z^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re} z^3 = 1$ und $\operatorname{Im} z^3 = 0$.
  Dies sind zwei Gleichungen für die beiden rellen Variablen x und y.

Bestimmen Sie alle Lösungen dieses Gleichungssystems, und zeichnen Sie sie in ein Diagramm der komplexen Ebene ein.

(Notwendige Punktzahl: 13 von 54)