

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

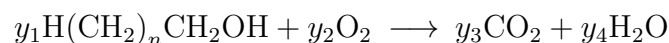
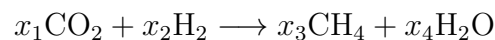
Übungsblatt 10 (Abgabe am 16.12.2011)

---

### Aufgabe 47

(5+5 = 10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges  $n \in \mathbb{N}_0$ ) ein lineares Gleichungssystem für die Werte  $x_i$  bzw.  $y_j$  aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle  $x_i$  bzw.  $y_j$  positive ganze Zahlen sind.

### Aufgabe 48

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Welche der folgenden Mengen  $M$  sind Vektorräume über  $K$ ? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a)  $M = \mathbb{Q}, K = \mathbb{R}$ ,

b)  $M = \mathbb{C}^2, K = \mathbb{R}$

c)  $M = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{C}$

d)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_3, 4x_1 + 2x_3 = 2x_2 \right\}, \quad K = \mathbb{R}$

e)  $M = \{ \text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 4 \text{ und Steigung Null im Ursprung} \}, \quad K = \mathbb{R}$

### Aufgabe 49

(10 Punkte)

Sei  $\phi \in \mathbb{R}$  beliebig aber fest. Sind die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$  mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Stellen Sie, falls möglich,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  dar.

**Aufgabe 50**

(5+5 = 10 Punkte)

$V := \text{span}(1, \sin(x), \cos(x))$  ist ein Unterraum von  $C([-\pi, \pi])$  mit  $\dim V = 3$  (vgl. Aufgabe 46). Sei  $L : V \rightarrow V$  definiert durch  $L(f) = f'$ . Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{g \in V \mid \exists f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von  $V$ ? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

**Aufgabe 51**

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jeweils ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert wird!

$$\text{a) } V = \mathbb{R}^n, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad \text{b) } V = \mathbb{R}^3, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2a_1 b_1 + a_2 b_2 + 5a_3 b_3$$

$$\text{c) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2 \quad \text{d) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_2 b_2 - a_1 b_1$$

$$\text{e) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$$

HINWEIS: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig zeigen, denn alle Abbildungen haben die Form  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$  mit  $\mu_{kj} = \mu_{jk}$ .

---

(Notwendige Punktzahl: 15 von 60)