Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 2 (Abgabe am 21.10.2011 **vor** der Vorlesung)

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bestimmen Sie geometrisch: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2011}$.
Hinweis: Denken Sie an die Polardarstellung für komplexe Zahlen, fertigen Sie eine Skizze an und erklären Sie.

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Seien $a_1 = a_2 = 1$ und für $n \geq 3$: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_{n+2} - 1 \quad \forall\, n \geq 1$

b) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall\, n \geq 2$

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_+^n - \alpha_-^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, wobei $\alpha_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\alpha_\pm + 1 = \alpha_\pm^2$ gilt.

d) Veranschaulichen Sie die Aussage aus Teil b durch eine Skizze. Ordnen Sie dazu Quadrate mit Kantenlängen a_1, a_2, a_3, a_4, … geeignet an und erklären Sie.

Aufgabe 9 (10 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
Wird ein Kreis durch n Sekanten in Teilgebiete zerlegt, so läßt er sich mit 2 Farben so einfärben, dass benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.
Hinweis: "Benachbart" bedeutet hier, dass die Gebiete entlang einer Strecke aneinanderstoßen (also nicht nur in einem Punkt).

Aufgabe 10 (15 Punkte)
Berechnen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x^{k+n+2}$ c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} k$ für $m > n \geq 0$.

(Notwendige Punktzahl: 15 von 60)