

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe am 04.11.2011 vor der Vorlesung)

### Aufgabe 15

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie (falls existent) die folgenden Grenzwerte!

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 - n^2 + 4}{3n^3 - 3n} - \frac{2n}{4n + 1} \right)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4n + \sqrt{n}} - \sqrt{4n - 11\sqrt{n}} \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + x - 2)}{(x - 1)^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + x - 2)}{(x - 1)^2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

### Aufgabe 16

(10 Punkte)

Zeigen Sie: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta(\varepsilon)$ , so dass

$$|x^2 - 9| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - 3| < \delta(\varepsilon),$$

d.h. geben Sie ein geeignetes  $\delta(\varepsilon)$  explizit an.

### Aufgabe 17

(3+3+3 = 9 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen stetig, stetig fortsetzbar (und wie?) bzw. unstetig?

a)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

b)  $f(x) = \frac{x^3 - 27}{(x + 1)(x - 3)}$

c)  $f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + x}{12x^3 - 3x}$

### Aufgabe 18

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktionen!

a)  $f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + x}{12x^3 - 3x}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{4x + 2}$

### Aufgabe 19

(5+5 = 10 Punkte)

Berechnen Sie für  $n \in \mathbb{N}_0$  (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a)  $\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \frac{1}{\mu + 1}$

b)  $\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=\nu}^n \frac{x^\mu \nu}{\mu(\mu + 1)}$

HINWEIS: Kennzeichnen Sie in der  $\mu\nu$ -Ebene jeweils alle Paare  $(\mu, \nu)$ , über die in  $\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \dots$  bzw. in  $\sum_{\mu=0}^n \sum_{\nu=0}^{\mu} \dots$  summiert wird. Was fällt Ihnen auf?

### Aufgabe 20

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten  $\gamma_{n\nu\mu}$  in

$$(a + b + c)^n = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \gamma_{n\nu\mu} a^\nu b^\mu c^{n-\nu-\mu}.$$

HINWEIS: Verwenden Sie die binomische Formel.

(Notwendige Punktzahl: 16 von 66)