Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 02.02.2012

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-3n & 9n \\ -n & 1+3n \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)^2}{(1-\cos x)^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x\cos^2 x} - \sqrt{x^2 - x\sin^2 x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{\log(\log x)}{\sin(\pi x/\mathrm{e})}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\sin(x) + x^2\cos^2(x)}{7x^2 - 2x^3}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{x-a}, \quad a \neq 0$

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{n+k} \nu$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=k}^{m} \frac{k}{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}\cos(\pi\nu)$

Aufgabe 4 (6+5 = 11 Punkte)
Wir definieren

$$H_n(x) := (-1)^n\, \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

a) Bestimmen Sie H_0, H_1 und H_2.
b) Drücken Sie $H_n'(x)$ in der Form $f(x)H_n(x) + g(x)H_{n+1}(x)$ mit geeigneten Funktionen f und g aus.

Zur Erinnerung: $g(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f(x) = g(x)\, f''(x)$ etc.

Aufgabe 5 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\mathrm{e}^{-(x+\pi)}$ um Null b) $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ um Null

c) $\mathrm{e}^{-(x+\pi)}$ um $x_0 = \pi$ d) $\dfrac{x}{(1-\pi x)(1-x)}$ um Null

Aufgabe 6 (3+4+2+2+4+4 = 19 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x^2+1}}{x^3 - x}\,.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$
e) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen f' verschwindet, sowie die Funktionswerte an diesen Stellen.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 7 (5+2 = 7 Punkte)

Sei $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 3 & 2 & \alpha & -4 \\ 4 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$

a) Berechnen Sie $\det A$.
b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?

Aufgabe 8 (5+5 = 10 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse A^{-1} und berechnen Sie die Lösung X von $AX = B$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 9 (2+6+6 = 14 Punkte)

Wie sie wissen, ist $\mathbb{R}^{n\times n}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass $\mathrm{Sym}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = A\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

Für quadratische Matrizen $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir die Spur $\operatorname{tr} A$, als die Summe der Diagonalelemente,

$$\operatorname{tr} A := \sum_{j=1}^{n} a_{jj}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Sym}(n) \times \mathrm{Sym}(n) \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^T B)$$

ein Skalarprodukt ist, d.h. zeigen Sie $\forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
(i) $\langle A, \lambda B\rangle = \lambda\langle A, B\rangle \;\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,
(ii) $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$ und (Hinweis: $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$)
(iii) $\langle A, A\rangle > 0 \;\forall\, A \neq$ der Nullmatrix.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

bezüglich des Skalarprodukts aus Teil b.