Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 11/12
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 11.4.2012

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 108 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Zeigen Sie: Addiert man die ersten n ungeraden Zahlen, so ergibt sich stets eine Quadratzahl.

Hinweise: Überlegen Sie zunächst, welche Quadratzahl sich ergibt.
Formulieren Sie Ihre Vermutung als Gleichung.
Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\mathrm{e}^x - x - 1)^3}{4x^8 - 3x^6}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}-5}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right)$

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n} x^{3\nu}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{n-\mu+1}$, c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir definieren

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (x^2 - 1)^n , \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Bestimmen Sie P_0, P_1 und P_2.

Zur Erinnerung: $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x) = f^{(n)}(x)$

Aufgabe 5 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{2+4x}$ b) $\cos(x^2)$ c) $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ (stetig fortgesetzt bei $x = 0$)

d) $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$

Aufgabe 6 (2+2+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen.
d) Bestimmen Sie die Tangente an der Stelle $x = 0$.
e) Skizzieren Sie die Funktion, sowie die Tangente aus Teil (d).
f) Geben Sie möglichst große $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$, d.h. geben Sie $f^{-1}(x)$ an.

Aufgabe 7 (4+4+2+2 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie A^2, A^3, $\det(A)$ und A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -2\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (2+6 = 8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren,

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Sind die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear unabhängig?
b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

$V := \mathrm{span}(1, x, x^2, x^3)$ ist ein Unterraum von $C([0,1])$ mit $\dim V = 4$. Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'$. Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\},$$

und geben Sie jeweils eine Basis an.

Aufgabe 10 (2+4+4 = 10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin x + \sinh x$.

a) Bestimmen Sie f'.
b) Zeigen Sie: f ist bijektiv.
c) Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(1 + \sinh \frac{\pi}{2})$.