Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2011/12
23.12.2011
Blatt 11

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = (x + \ln(x))^7$$
$$h(x) = \ln(\ln(x))\ln(x)$$

2. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)}, \int \ln(x)dx, \int \frac{dx}{x^2-1}$$

3. (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktionalgleichung von $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dass für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\ln(x^r) = r\ln(x)$$

(Hinweis: Beweisen Sie die Formel zunächst für $r \in \mathbb{N}$, dann für $r \in \mathbb{Z}$ und schließlich für $r \in \mathbb{Q}$.)

(b) Zeigen Sie nun die Identität aus (a) mit Hilfe der Ableitungen beider Seiten.

4. Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und es gelte $f(I) \subseteq I$.

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Leibnizsche Regel:

$$\frac{d^n(fg)}{dx^n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}f}{dx^{n-k}}(x)\frac{d^k g}{dx^k}(x)$$

(b) (∗) Beweisen Sie die Formel von Faó di Bruno (wenigstens für kleine $n \in \mathbb{N}$):

$$\frac{d^n(g\circ f)}{dx^n}(x) \sum_{\sum_{i=1}^n ik_i = n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!} \frac{d^{\sum k_i}g}{dx^{\sum k_i}} \circ f(x) \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \prod_{l=m}^{n} \left(\frac{d^m f}{dx^m}(x)\right)^l .$$

(Diese Teilaufgabe geht nicht in die Wertung ein.)

Abgabe: Freitag, 13. Januar 2012, 9 Uhr, in der Vorlesung

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr