Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2011/12
13.01.2012
Blatt 12

Übungen zu „Mathematik für Physiker I"

1. Sei $c \in \mathbb{R}$. Differenzieren Sie die Funktionen $f, g, h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^c,\ g(x) = x^x,\ h(x) = x^{x^x}.$$

2. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$ so existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = ce^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. (Hinweis: Man differenziere die Funktion $x \mapsto e^{-x} f(x)$.)

3. Man definiert die hyperbolischen Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

   (a) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$: $\cosh^2(x) - \sinh(x) = 1$.

   (b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$: $\cosh'(x) = \sinh(x), \sinh'(x) = \cosh(x)$.

   (c) Zeigen Sie, dass $\cosh|_{(0,\infty)} : (0, \infty) \to (1, \infty)$ und $\sinh|_{(0,\infty)} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ bijektiv sind. Ihre Umkehrfunktionen werden mir $\operatorname{Arcosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$ und $\operatorname{Arsinh} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ bezeichnet. Berechnen Sie die Ableitungen von Arcosh und Arsinh.

4. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx.$$

(Hinweis: Man substituiere zunächst $x = \sinh(u)$ und führe anschließend eine partielle Integration durch.)

Abgabe: Freitag, 20. Januar 2012, 9 Uhr, in der Vorlesung