Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2011/12
20.01.2012
Blatt 13

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zwei mal differenzierbare Funktion mit $f'' = f$, dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$f(x) = a\cosh(x) + b\sinh(x)$$

2. Beweisen Sie die Funktionalgleichungen für cosh und sinh: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$
$$\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \cosh(y)\sinh(x).$$

3. Sei $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$ und $P = (a,b) \in H$ mit $b \geq 0$. Sei $Q = (a,-b)$, $o = (0,0)$ und F der Flächeninhalt der Fläche, die von $\overline{oP}$, $\overline{oQ}$ und H eingeschlossen wird. Zeigen Sie, dass dann $a = \cosh(F)$ und $b = \sinh(F)$ gilt.

4. Die *Standard-Zykloide* (Rollkurve) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ entsteht dadurch, dass man einen Kreis vom Radius 1 auf der x-Achse ablaufen lässt und dabei die Spur eines Punktes auf dem Kreis verfolgt.

   (a) Sagen wir, dass die Zykloide durch $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ geht. Begründen Sie dann, dass $\alpha\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$,
   $$\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)),$$
   eine Parametrisierung von C ist und machen Sie eine Skizze von C.

   (b) Berechnen Sie die Länge der Standard-Zykloide zwischen zwei Spitzen (sagen wir zwischen $(0,0)$ und $(2\pi, 0)$. (Hinweis: Benutzen Sie das Additionstheorem für cos.)

Abgabe: Freitag, 27. Januar 2012, 9 Uhr, in der Vorlesung