Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2011/12
28.10.2011
Blatt 3

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Zeigen Sie (mit Hilfe vollständiger Induktion über n): Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

2. Wo steckt der Fehler in folgendem “Beweis” der Aussage “Ist auf einem Parkplatz mit n Autos eines rot, so sind sie alle rot”?
“Beweis.” Induktionsanfang (n=1): Steht auf einem Parkplatz nur ein Auto und dieses ist rot, dann sind dort alle Autos rot.
Induktionsschritt ($n \mapsto (n+1)$): Man nummeriere die Autos durch, $A_1, ..., A_{n+1}$, und betrachte die Gruppe G_1 der ersten n Autos, $G_1 = \{A_1, ..., A_n\}$, und G_2, die Gruppe der letzten n Autos, $G_2 = \{A_2, ..., A_{n+1}\}$. Wählen wir die Nummerierung so, dass das rote Auto weder als erstes noch als letztes aufgezählt wird, so können wir die Induktionsvoraussetzung sowohl auf G_1 als auch auf G_2 anwenden. Es sind also $A_1, ..., A_n$ rot, aber auch $A_2, ..., A_{n+1}$; also sind alle $n+1$ Autos rot.

3. Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{R}$ und gegen $b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $a = b$. (Hinweis: Nehmen Sie an, dass (x_n) gegen a konvergiert und $b > a$ ist. Wählen Sie $\varepsilon := \frac{b-a}{2}$ und zeigen Sie, dass fast alle Folgenglieder außerhalb des Intervalls $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ liegen.)

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *Polynom über* $\mathbb{K}$ ist ein Ausdruck der Form
$$P = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0.$$
Hierbei ist $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, ..., n$ und X ein *Unbestimmte* (ein Symbol, für das man etwas einsetzen kann). Ist $a_n \neq 0$, so nennt man $\deg(P) := n$ den Grad von P. (Das *Nullpolynom* hat jeden Grad.)

   (a) Eine *Nullstelle von* P ist ein ein Element $x \in \mathbb{K}$, so dass gilt $P(x) = 0$. (Nun hat man für X das Körperelement x eingesetzt.) Zeigen Sie: Ist P ein Polynom über $\mathbb{K}$, wir schreiben: $P \in \mathbb{K}[X]$, vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und $P \neq 0$, so hat P höchstens n Nullstellen. (Hinweis: Benutzen Sie, dass Sie in $\mathbb{K}[X]$ “mit Rest dividieren” können: Ist $x \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von P, so gibt es ein Polynom $Q \in \mathbb{K}[X]$ vom Grad $\deg P - 1$, so dass gilt: $P = (X - x) \cdot Q$.)

   (b) Zeigen Sie nun: Ist $\mathbb{K}$ unendlich, so ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, die jedem Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$ seine Polynomfunktion $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $p(x) = P(x)$, zuordnet, injektiv (d.h.: die Koeffizienten eines Polynoms sind durch seine Polynomfunktion eindeutig bestimmt).

Abgabe: Freitag, 4. November 2011, 9 Uhr, in der Vorlesung