Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2011/12
18.11.2011
Blatt 6

Übungen zu „Mathematik für Physiker I"

1. Eine reelle Zahl α heißt *algebraisch*, wenn es ein von Null verschiedenes Polynom mit rationalen Koeffizienten P gibt, so dass $P(\alpha) = 0$ ist. Sie heißt *transzendent*, wenn sie nicht algebraisch ist.
   (a) Zeigen Sie, dass jede rationale Zahl algebraisch ist und $\sqrt{2}$ auch algebraisch ist.
   (b) Zeigen Sie, dass es eine transzendente Zahl gibt. (Hinweis: Es gibt sogar überabzählbar viele.)
2. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f\colon I \mapsto J$ und $g\colon J \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in I$ und $y_0 = f(x_0)$. Zeigen Sie: Ist f stetig in x_0 und g stetig in y_0, so ist auch $g \circ f\colon I \mapsto \mathbb{R}$ stetig in x_0.
3. Gegeben sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Geben Sie explizit ein $\delta > 0$ an, so dass aus $0 < |x - x_0| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist, um die Stetigkeit von f in x_0 zu zeigen.
4. Betrachten Sie die Folgen (x_n) und (y_n) mit
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ und } y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$
   (a) Zeigen Sie: (x_n) ist streng monoton wachsend, (y_n) ist streng monoton fallend (Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Bernoullis Ungleichung, dass $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ist),
   (b) zeigen Sie, dass (x_n) und (y_n) konvergieren und beide denselben Grenzwert haben,
   (c) zeigen Sie, dass dieser Grenzwert die Eulersche Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n1}$ ist.

Abgabe: Freitag, 25. November 2011, 9 Uhr, in der Vorlesung