Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2011/12
02.12.2011
Blatt 8

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und
$$\int_a^b (\varphi - \psi)\mathrm{dx} < \varepsilon.$$

2. Für jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert man ihren positiven Anteil f_+ durch
$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
Zeigen Sie: Ist f integrierbar, so auch f_+.(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.)

3. Betrachten Sie die Funktion $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = \frac{1}{n}, \text{für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$
Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und berechnen Sie $\int_0^1 f\mathrm{dx}$.

4. Sei $b > 1$ und $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ betrachte man die Unterteilung $Z^r = (x_0^{(r)}, ..., x_r^{(r)})$ von $[1, b]$, die durch $x_k^{(r)} := q_r^k$ mit $q_r := \sqrt[r]{b}$ gegeben ist $(k = 0, ..., r)$. Betrachte weiterhin die Stützstellen $\xi^{(r)} = (\xi_1^{(r)}, ..., \xi_r^{(r)})$, $\xi_k^{(r)} := x_{k-1}^{(r)}$, $k = 1, ..., r$. Zeigen Sie nun (Tipp: geometrische Summenformel), dass für die Riemannsche Summe $S_r = S(f, Z^{(r)}, \xi^{(r)})$ der Funktion $f : [1, b] \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$ gilt
$$S_r = \frac{b^{n+1} - 1}{1 + q_r + ... + q_r^n}.$$
   (b) Zeigen Sie damit
$$\int_1^b x^n \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{b^{n+1} - 1}}{\mathrm{n + 1}}.$$

Abgabe: Freitag, 9. Dezember 2011, 9 Uhr, in der Vorlesung