Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2011/12
09.12.2011
Blatt 9

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\xi \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass auch $f|_{[a,\xi]}$ und $f|_{[\xi,b]}$ integrierbar sind und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx.$$

   (Hinweis: Benutzen Sie (7.6) aus der Vorlesung und Aufgabe 1 von Blatt 8.)

2. Zeigen Sie, dass für jedes $b > 0$ gilt:

$$\int_0^b \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{b^3}.$$

   (Hinweis: Benutzen Sie die geometrische Progression.)

3. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) := 1$, $f(x) := 0$, wenn x irrational ist und $f(x) := \frac{1}{q}$, wenn $x = \frac{p}{q}$ ist, mit $p, q \in \mathbb{N}$ und der Bruch $\frac{p}{q}$ gekürzt ist.

   (a) Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ unstetig , aber in den irrationalen Punkten von $[0,1]$ stetig ist. (Hinweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $x \in [0,1]$ mit $f(x) \geq \varepsilon$.)

   (b) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und dass $\int_0^1 f(x)dx = 0$ ist.

4. Zeigen Sie: Ist $f : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und $\int_a^b f(x)dx = 0$, so ist $f = 0$.

Abgabe: Freitag, 16. Dezember 2011, 9 Uhr, in der Vorlesung