Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Florian Schmidt

WS 2011/12
10.04.2012

Nachklausur zu „Mathematik für Physiker 1“

1. (2P) Bestimmen Sie den Wert der unendlichen Reihe
$$\sum_k^\infty \frac{1}{k!}(9/11)^k.$$

2. (2P) Berechnen Sie die Stammfunktion $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ der Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = \sin^2(x),$$
mit $F(0) = 0$.

3. (4P) Widerlegen Sie folgende Aussagen durch die Angabe eines Gegenbeispiels:
   (a) Jede monoton steigende Folge ist konvergent;
   (b) jedes Polynom $P \in \mathbf{R}[X]$ hat eine reelle Nullstelle;
   (c) die Umkehrabbildung einer bijektiven, differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist differenzierbar;
   (d) jede streng monoton steigende Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ ist bijektiv.

4. (4P) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = |x|x,$$
stetig differenzierbar ist. (Hinweis: Was ist ihre Ableitung?)

5. (4P) Sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ stetig. Wir definieren $H\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch
$$H(x) = e^{\int_0^x f(t)dt}.$$
   (a) Begründen Sie, warum H differenzierbar ist und berechnen Sie dann die Ableitung von H in Termen von f und H. (Hinweis: Drücken Sie H mit Hilfe der Funktion $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ aus.)
   (b) Zeigen Sie: Ist $G\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $G' = fG$, so gilt (für alle $x \in \mathbf{R}$):
$$G(x) = G(0)H(x).$$
   (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $G/H\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto G(x)/H(x)$.)