Mathematische Physik I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Sei $\phi(x) = x^5$ und $M_1 = (\mathbb{R}, \{\phi\})$, $M_2 = (\mathbb{R}, \{\mathrm{id}\})$. Zeige, dass

a) $\phi : M_1 \to M_2$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist,

b) M_1 und M_2 nicht identisch sind.

Aufgabe 2:

a) Zeige, dass jede Karte, wenn man sie als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten auffasst, ein Diffeomorphismus ist!

b) Zeige: Zwei Mannigfaltigkeitsstrukturen über derselben Menge M sind genau dann gleich (d.h. sie werden durch äquivalente Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ definiert), wenn die Identität,

$$\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2), \quad m \mapsto m\,,$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3:

Zeige, dass $(S^2, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit ist, wobei $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | |x| = 1\}$ die 2-Sphäre ist und $\mathcal{A} = \{\phi^S, \phi^N\}$ der Atlas bestehend aus den stereographischen Projektionen vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ und Südpol $S = (0, 0, -1)$.

$$\begin{aligned} \phi^N &: S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 \\ \phi^S &: S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2 \\ \phi^{N,S}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{1 \mp x_3}(x_1, x_2). \end{aligned}$$