Mathematische Physik I

Übungsblatt 10

Aufgabe 41:

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ konvex. Sei g die Legendre-Transformation $g(p) = \max_x(\langle x, p\rangle - f(x))$ von f. Zeige:

$$\langle x, p\rangle \leq f(x) + g(p)$$

und wende dies auf $f(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$ an um *Youngs Ungleichung* herzuleiten:

$$\langle x, p\rangle \leq \frac{|x|^\alpha}{\alpha} + \frac{|p|^\beta}{\beta}, \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Aufgabe 42: Das Noether-Theorem in der Hamiltonschen Mechanik

Sei (P, ω) eine einfach zusammenhängende symplektische Mannigfaltigkeit, $H \in C^\infty(P)$ und Φ_t eine kontinuierliche Symmetrie des Systems, d.h. $t \mapsto \Phi_t$ ist ein Fluss auf M so, dass jedes Φ_t eine kanonische Transformation ist, welche H invariant läßt, also $\Phi_t^* H = H$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass es eine zu Φ_t gehörige Erhaltungsgröße $F \in C^\infty(P)$ gibt, mit $\Phi_t = \Phi_t^{X_F}$ und $\{F, H\} = 0$.

Zusatz: Lifted man eine Symmetrietransformation des Konfigurationsraums M auf den Phasenraum T^*M, so wirkt sie immer als kanonische Transformation. Zeige dazu: Sei $P = T^*M$ versehen mit der kanonischen symplektischen Form und ϕ_t ein Fluss auf M (wir stellen uns hier die Gruppenwirkung einer Symmetriegruppe des Konfigurationsraumes M vor). Zeige, dass $\Phi_t := T^*\phi_t$ dann ein Fluss auf P ist und Φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ eine kanonische Transformation ist.

Aufgabe 43:

Sei $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ eine riemannsche Metrik auf M. Betrachte das Funktional

$$S(\gamma) := \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt$$

für Kurven $\gamma : [0, 1] \to M$ mit vorgegebenen Endpunkten $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$.

Zeige, dass auf einer Kartenumgebung mit Koordinaten x^i, wo $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$, stationäre Punkte von S die Geodätengleichung

$$\ddot\gamma^k + \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = 0$$

erfüllen, wobei $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$.

Aufgabe 44:

Sei $M = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{L}(x, \dot x) = \frac{\dot x^2}{2}m - V(|x|)$.

a) Zeige mittels Noether-Theorem, dass die i-te Komponente des Drehimpulses

$$L^i = -m\langle \dot x, e_i \times x\rangle = m(\dot x \times x)^i$$

erhalten ist.

b) Sei $\phi : T^*M \to TM$, $\phi(q, p) = (q, \frac{\partial H}{\partial p})$ und $f^i = L^i \circ \phi$. Zeige, dass

$$\{f^i, H\} = 0.$$