Mathematische Physik I

Übungsblatt 11

Aufgabe 45: Lineare Bewegung auf dem 2-Torus
Sei $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ der 2-Torus und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$, $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Es gelte

$$\dot{\varphi}_1 \;=\; \omega_1 \qquad \text{und} \qquad \dot{\varphi}_2 \;=\; \omega_2.$$

für $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$. Zeige die folgenden Implikationen:

a) $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \implies \varphi(t)$ ist periodisch,

b) $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q} \implies \{\varphi(t) |\, t \in \mathbb{R}\}$ liegt dicht in $\mathbb{T}^2$.

Aufgabe 46: Liouville-Torus als Lagrangesche Untermannigfaltigkeit
Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$. Die Menge $\{F_1, ..., F_n\} \subset C^\infty(M)$ sei integrabel und $f \in \mathbb{R}^n$. Setze $F := (F_1, ..., F_n) : M \to \mathbb{R}^n$ und

$$M_f \;:=\; \{x \in M |\, F(x) = f\}\,.$$

Zeige: Falls f regulärer Wert von F ist, d.h.

$$\mathrm{d}F_1(x) \wedge ... \wedge \mathrm{d}F_n(x) \;\neq\; 0 \qquad \text{für alle } \; x \in M_f,$$

dann ist M_f Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe 47: Erzeugende Funktionen
Sei $M = \mathbb{R}^{2n}$ versehen mit der kanonischen symplektischen Form ω_0 und sei $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2$. Bestimme eine erzeugende Funktion S der kanonischen Transformation

$$\Phi_t^{X_H} : (q, p) \mapsto (q + pt, p)$$

gegeben durch den freien Fluss für $t \in \mathbb{R}$. Betrachte dabei eine in der Vorlesung besprochene Möglichkeit S darzustellen. Welche Darstellungen kommen für welche Zeiten infrage?