Mathematische Physik I

Übungsblatt 13

Aufgabe 50: Der Virialsatz

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H \in C^\infty(M)$ eine Hamiltonfunktion, die einen vollständigen Fluss $\Phi_t^{X_H}$ auf M erzeugt.
Zeige, dass für beliebiges $f \in C^\infty(M)$ das Zeitmittel der Funktion $\{f, H\} \in C^\infty(M)$ auf jeder kompakten Energieschale $M_E := \{x \in M \,|\, H(x) = E\}$ verschwindet (bzw. überall, falls f beschränkt ist).

Aufgabe 51: Naive Störungstheorie

Seien $X_0, X_1 \in \mathcal{T}_0^1(M)$ Vektorfelder auf der kompakten Mannigfaltigkeit M, $g \in C^\infty(M)$ und $X_\varepsilon = X_0 + \varepsilon X_1$. Weiterhin seien

$$g^0(t) := g \circ \Phi_t^{X_0} \quad \text{und} \quad g^\varepsilon(t) := g \circ \Phi_t^{X_\varepsilon}\,.$$

Zeigen Sie, dass es ein $c > 0$ gibt mit

$$\|g^\varepsilon(t) - g^0(t)\|_\infty \leq c\,\varepsilon|t| \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Tipp: Beachten Sie, dass $\|g^\varepsilon(t) - g^0(t)\|_\infty = \|g - \Phi_{-t}^{X_\varepsilon *}\Phi_t^{X_0 *} g\|_\infty$.

Aufgabe 52: Störungstheorie integrabler Systeme: ein einfacher Spezialfall

Sei $M = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ und $\omega \in \mathbb{R}^n$ erfülle eine geeignete (γ, τ)-diophantische Bedingung. Wir betrachten die Hamiltonfunktion

$$H^\varepsilon(\varphi, I) \;=\; H_0(I) \;+\; \varepsilon H_1(\varphi)$$

mit $H_0(I) = \omega \cdot I$ und $H_1 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ glatt.
Zeigen, dass H^ε für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ wieder integrabel ist, indem Du den ersten Schritt der Störungstheorie aus der Vorlesung durchführst.
Gib ein Beispiel für ein resonantes ω und ein $H_1(\varphi)$ an, so, dass das Mittelungsprinzip auf H^ε nicht anwendbar ist.