Mathematische Physik I

Übungsblatt 3

Aufgabe 8: Lie-Ableitung

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeige folgende Eigenschaften der Lie-Ableitung:

$$L_X(f+g) = L_X f \; + \; L_X g, \tag{1}$$
$$L_X(fg) = (L_X f)g \; + \; f(L_X g), \tag{2}$$
$$L_{\alpha X+\beta Y}(f) = \alpha\, L_X f \; + \; \beta\, L_Y f \tag{3}$$

für $f, g, \alpha, \beta \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$.

Aufgabe 9: Derivationen als Vektorfelder

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mit

$$L\,(\alpha f + g) = \alpha L f \; + \; Lg \tag{4}$$
$$L\,(fg) = (Lf)g \; + \; f(Lg) \tag{5}$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $L = L_X$ gilt für ein $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$.

Tipp: Zeige zunächst, dass $L(\text{const.}) = 0$ ist. Verwende dann lokale Koordinaten, führe eine Taylorentwicklung durch und argumentiere, wie L auf die einzelnen Terme wirkt!

Aufgabe 10: Der Kommutator von Vektorfeldern

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Zeige, dass es $Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ gibt, so dass

$$L_X \circ L_Y \; - \; L_Y \circ L_X \; = \; L_Z.$$

Hinweis: Verwende das Ergebnis von Aufgabe 9!

Aufgabe 11: Flüsse

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 1\}$. Gib jeweils ein Vektorfeld $Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ und den zugehörigen Fluss $\Phi^Z : D \to M$ mit dem Definitionsbereich D an, so dass gilt:

a) Z ist vollständig,

b) Z ist nicht vollständig.

Aufgabe 12:

Sei $v(x) = x^2 \frac{d}{dx}$. Finde das grösste $\varepsilon > 0$, so dass der Fluss $\Phi : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \Phi(x,t)$ von v definiert ist.