Mathematische Physik I

Übungsblatt 4

Aufgabe 13: Basiswechsel
Sei T^1_0 ein n-dimensionaler Vektorraum und T^0_1 sein Dual. Sei $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Basis von T^1_0 und $(e^j)_{j=1,\ldots,n}$ die duale Basis von T^0_1 definiert durch $e^j(e_i) := \delta_{ij}$. Sei $A : T^1_0 \to T^1_0$ ein Basiwechsel mit Matrix a^i_j bzgl. der Basis $(e_j)_j$ und $\hat{e}_j := Ae_j$ die neuen Basisvektoren, also

$$\hat{e}_j \;=\; \sum_i a^i_j \, e_i.$$

Wie transformiert sich dann die duale Basis? Genauer: Sei $(\hat{e}^j)_j$ die duale Basis zu $(\hat{e}_j)_j$. Bestimme die Matrix b^j_k, so dass

$$\hat{e}^j \;=\; \sum_k b^j_k \, e^k.$$

Wie transformieren sich dann die Komponenten eines Tensors $t \in T^r_s$ bei Basiswechseln? Folgere aus dem Ergebnis, dass die Spur von $t \in T^1_1$ definiert durch

$$\mathrm{tr}(t) \;=\; \sum_j t(e^j, e_j)$$

unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Aufgabe 14: Der Hodge-Operator
In dieser Aufgabe zeigen wir, dass der Hodge-Operator $*$ auf Λ_k für symmetrisches, nichtentartetes $g \in T^0_2$ die Gleichung

$$* \circ * \;=\; (-1)^{k\,(n-k)}\, \mathrm{sgn}(g) \tag{1}$$

erfüllt, wobei $\mathrm{sgn}(g)$ das Vorzeichen der Determinante von g ist.

a) Mache dir zunächst klar, dass es eine Basis (e^j) von T^0_1 gibt, in der die Komponenten g_{ij} von $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ diagonal sind, d.h. $g_{ij} = 0$ falls $i \neq j$.

b) Sei $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ ein geordnetes k-Tupel mit $j_i \in \{1, \ldots, n\}$. Bestimme $*(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}) := i_{e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}} \varepsilon$, wobei (e^j) die Basis aus a) sei.

c) Zeige nun Gleichung (1).

Aufgabe 15:

Sei $\Phi : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus und $f \in C^\infty(M_1)$ Zeige, dass

$$\Phi_* \, df \;=\; d\,(\Phi_* \, f).$$

Aufgabe 16:

Seien $\omega \in \Lambda_p(M)$, $\nu \in \Lambda_q(M)$, $X \in T^1_0(M)$. Zeige:

a) $i_X \omega \wedge \nu = (i_X \omega) \wedge \nu + (-1)^p \omega \wedge (i_X \nu)$,

b) $\omega \wedge \nu = (-1)^{pq} \nu \wedge \omega$,

c) $i_\nu * \omega = *(\omega \wedge \nu)$,

d) Sei $M = \mathbb{R}^3$, $\omega = a_i dx^i$ und $g \in T^2_0(\mathbb{R}^3)$. Berechne $(*\omega)$.

Aufgabe 17:

Sei $\dim(M) = n$ und $(V, \varphi), (V, \tilde{\varphi})$ zwei Karten mit Basen $\{\partial_{q^i}\}$, bzw. $\{\partial_{\tilde{q}^i}\}$ für $T_x M$. Zeige

$$\partial_{q^i} = (D\phi)^j_i \partial_{\tilde{q}^j}$$

mit $\phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$.

Hinweis: Für $f \in C^\infty(M)$ gilt

$$L_{\partial_{q^i}} f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i).$$

Verwende nun, dass $\varphi^{-1} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \phi$ und

$$\partial_{\tilde{q}^i} = [\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\varphi}(x) + te_i)]_x$$

um zu zeigen, dass

$$L_{\partial_{q^i}} f = L_{(D\phi)^j_i \partial_{\tilde{q}^j}} f.$$