Mathematische Physik I

Übungsblatt 5

Aufgabe 18: Die kanonische Volumenform

Sei $g \in T^0_2$ nicht-entartet und $(e^j)_{j=1,\dots,n}$ eine Basis von T^0_1 mit $g = g_{ij}\, e^i \otimes e^j$. Zeige, dass die kanonische Volumenform $\varepsilon := \sqrt{\det |g_{ij}|}\, e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$ bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Aufgabe 19: Isometrien des Minkowskiraums

Sei $T^1_0 = \mathbb{R}^4$ und $\eta \in T^0_2$ die Minkowski-Metrik darauf, d.h. $\eta_{ij} = \sigma_i \delta_{ij}$ und $\sigma_1 = 1$, $\sigma_{i\neq 1} = -1$.

a) Sei $\Lambda \in T^1_1$. Mache dir klar, dass Λ eine lineare Abbildung $\Lambda : T^1_0 \to T^1_0$ definiert. Zeige, dass Λ genau dann eine Isometrie ist, also $\eta(\Lambda v, \Lambda v) = \eta(v, v)$ für alle $v \in T^1_0$, wenn

$$\Lambda^i_k \eta_{ij} \Lambda^j_\ell = \eta_{k\ell} \qquad \text{also} \qquad \Lambda^T\, \eta\, \Lambda \;=\; \eta.$$

Mache dir klar, dass in dieser Notation die darstellende Matrix $\Lambda_{ij} = \Lambda^i_j$ (also Zeilenindex oben und Spaltenindex unten) geschrieben wird.

b) Zeige, dass sowohl eine orthogonale Transformation in der zweiten bis vierten Koordinate, d.h.

$$R \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

für ein $r \in \mathbb{O}(3)$, als auch der s-Boost in x-Richtung, d.h.

$$B^s_x \;=\; \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Isometrien des Minkowskiraums sind. Folgere, dass die speziellen Lorentztransformationen gegeben durch

$$\Lambda \;=\; R_1\, B^s_x\, R_2$$

ebenfalls Isometrien sind.

Aufgabe 20: Polarkoordinaten

a) Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | \, x \leq 0\}$. Auf M sind die natürliche Karte $\varphi : M \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | \, x \leq 0\}$, $\varphi = \mathrm{id}$ und die Karte zu Polarkoordinaten $\tilde{\varphi} : M \to (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$, also

$$\tilde{\varphi}^{-1}(r, \phi) \;=\; (r \cos\phi, r \sin\phi)\,,$$

verträglich. Drücke $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ durch $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\phi$ aus. Sei g die euklidische Metrik auf M, d.h.

$$g \;=\; \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x \;+\; \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y.$$

Wie sieht g in der durch $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\phi$ erzeugten Basis von $\mathcal{T}^0_2(M)$ aus?

b) Wie sieht die kanonische Volumenform in der durch $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\phi$ erzeugten Basis von $\mathcal{T}_2^0(M)$ aus?

Aufgabe 21: Hodge-Dualität im Minkowskiraum
Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik η im $\mathbb{R}^4$, wobei wir die kanonischen Koordinaten mit (t, x_1, x_2, x_3) bezeichnen, also $\eta = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$. Berechne die Bilder der kanonischen Basisvektoren von $\Lambda_k(\mathbb{R}^4)$ für alle $k \leq 4$.

Hinweis: Spare Arbeit durch Anwenden von Formel (1) aus Aufgabe 14!

Aufgabe 22: Die Maxwell-Gleichungen
Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik η im $\mathbb{R}^4$. Das elektrische Feld E, das magnetische Feld B und die Stromdichte J seien zeitabhängige Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^3$, also

$$E, B, J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

und die Ladungsdichte $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Alle Abbildungen werden als glatt vorausgesetzt. Man definiert die zugehörigen Differentialformen auf dem Minkowskiraum $\mathcal{J}, \mathcal{E} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4)$ und $\mathcal{B}, \mathcal{F} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &:= \rho\,\mathrm{d}t \;-\; J_i\,\mathrm{d}x^i, \\
\mathcal{E} &:= E_i\,\mathrm{d}x^i, \\
\mathcal{B} &:= *\,(B_i\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^i), \\
\mathcal{F} &:= \mathrm{d}t \wedge \mathcal{E} - \mathcal{B}\,.
\end{aligned}$$

Zeige die folgenden zwei Äquivalenzen:

$$\begin{array}{llcl}
\dfrac{\partial B}{\partial t} + \mathrm{rot}E = \;0 & \mathrm{div}B = 0 & \Longleftrightarrow & \mathrm{d}\mathcal{F} = 0, \\
-\dfrac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{rot}B = 4\pi J, & \mathrm{div}E = 4\pi\rho & \Longleftrightarrow & \mathrm{d}(*\mathcal{F}) = 4\pi(*\mathcal{J}).
\end{array}$$

Die Maxwell-Gleichungen haben also für die zugehörigen Differentialformen eine sehr einfache Form.