Mathematische Physik I

Übungsblatt 6

Aufgabe 23: Kommutator und Jacobi-Identität
Sei $\tau \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Zeige, dass für alle $X, Y, Z \in \mathcal{T}_0^1$

a) $L_{[X,Y]}\,\tau = (L_X L_Y \,-\, L_Y L_X)\,\tau$
b) $0 = \big[X, [Y,Z]\big] \,+\, \big[Y,[Z,X]\big] \,+\, \big[Z,[X,Y]\big]$

gilt.

Aufgabe 24:

Zeige

$$L_X i_Y - i_Y L_X = i_{[X,Y]}.$$

Aufgabe 25:

Sei $\omega = \omega_i(q)dq^i$ und $X = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i}$. Berechne $L_X\omega$ mittels

$$L_X\omega = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left((\phi_t)^*\omega\right),$$

wobei ϕ_t den Fluss zum Vektorfeld X bezeichnet.

Aufgabe 26: Der Laplace-Beltrami-Operator
Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Pseudo-Metrik $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ und $*$ der zugehörige Hodge-Operator. Auf $\Lambda_k(M)$ definiert man die Coableitung $\delta : \Lambda_k(M) \to \Lambda_{k-1}(M)$ durch $\delta := (-1)^k *^{-1} \mathrm{d}\,*$, wobei nach Aufgabe 14 auf Λ_k gilt $*^{-1} = (-1)^{k(n-k)}\mathrm{sgn}(g)*$.

a) Sei $M = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik. Zeige, dass für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = \Lambda_0(\mathbb{R}^n)$

$$(\delta\mathrm{d} \,+\, \mathrm{d}\delta)f \;=\; -\Delta f\,,$$

wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{q_i}^2$ den üblichen Laplace-Operator bezeichnet.

b) Sei $M = \mathbb{R}^4$ mit der Minkowski-Metrik im $\mathbb{R}^4$. Zeige, dass für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4) = \Lambda_0(\mathbb{R}^4)$

$$(\delta\mathrm{d} \,+\, \mathrm{d}\delta)f \;=\; -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \,-\, \Delta\right) f.$$

Aufgabe 27:

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Zeige:

a) Es existiert eine Folge kompakter Mengen $K_j \subset M$ mit $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = M$ und $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$.
b) M besitzt einen abzählbaren, lokal endlichen Atlas.
Hinweis: Verwende die Folge K_j.